

BRUNO CABRAL BERGAMASCO

**O MODELO MINIMAX E A INCERTEZA
NA GESTÃO DE PORTFÓLIO**

Trabalho de Formatura apresentado à
Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do Diploma
de Engenheiro de Produção

SÃO PAULO

2006

BRUNO CABRAL BERGAMASCO

**O MODELO MINIMAX E A INCERTEZA
NA GESTÃO DE PORTFÓLIO**

Trabalho de Formatura apresentado à
Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do Diploma
de Engenheiro de Produção

Orientadora:
Prof^a Dr^a Celma de Oliveira Ribeiro

SÃO PAULO

2006

À MINHA FAMÍLIA

AGRADECIMENTOS

Ao meu pai, Leonildo Bergamasco, pelo incentivo em todos os momentos e pelo seu apoio incondicional em tudo o que faço. É uma honra poder escrever seu nome aqui.

À minha mãe, Fátima Maria Cabral Bergamasco, por tudo aquilo que sou, e por todo o seu amor. A ela todo o meu carinho e gratidão.

À minha irmã e grande amiga, Nathália Cabral Bergamasco.

À minha tia Antonia, ao meu tio Antonio, e aos meus primos Rodrigo, João e Henrique, pelo grande carinho na forma em que me acolheram. Ficam aqui registrados os meus mais sinceros agradecimentos.

A toda minha família, pelo grande apoio e amizade em todos os momentos, sendo o grande alicerce para a pessoa que sou hoje.

À minha namorada, Manuela Turner Marquez, pela sua companhia e pelo seu carinho. Ela é uma das provas de que tenho tido sorte na vida.

Aos meus amigos Pedro Shima, Ricardo Tortato, Sandro Pelegrino, Thiago Rossini e Hugo Cabral Victório. Não poderia deixar de mencionar a importância deles em minha vida.

Em especial, agradeço ao Pánela, composto pelos amigos da faculdade, pelo grande companheirismo demonstrado em todos os momentos de minha vida acadêmica.

À Prof^a Dr^a Celma de Oliveira Ribeiro, pela excelente orientação, e também pelo incentivo e paciência durante a realização deste trabalho.

Ao professor André Martins e ao engenheiro Orlando Sampaio pela ajuda no entendimento da estatística bayesiana.

Aos professores do departamento de engenharia de produção, pelos conhecimentos transmitidos que permitiram construir e elaborar este trabalho de formatura.

À equipe a qual faço parte no Banco Itaú, pelo apoio e ensinamentos transmitidos ao longo de todo o meu período de estágio. Em especial, aos meus chefes diretos Luís Vital, Márcio Motizuki, Luciano Guedes Maciel e Adolfo Pinto, incentivadores e grandes amigos.

A todos aqueles que, embora não citados, tiveram relação direta ou indireta com minha formação pessoal, profissional e acadêmica, meus mais sinceros agradecimentos.

RESUMO

O trabalho estudou o problema de composição de portfólio de mínimo risco, abordando a incerteza nos parâmetros dos modelos de auxílio à tomada de decisão. O comportamento de medidas de risco foi avaliado com a incorporação de incerteza nos estimadores de seus parâmetros através de inferência bayesiana, indicando que a incerteza pode causar grande impacto financeiro nas empresas, e que este impacto depende muito da metodologia de estimação empregada. O modelo minimax implementado resolve o problema de composição de portfólio de mínimo risco com a consideração de incerteza em um de seus parâmetros. Questões como robustez e desempenho foram analisadas demonstrando que o modelo minimax apresenta maior credibilidade no que se refere ao alcance do retorno esperado, mas demanda maiores alterações em suas soluções em comparação com o modelo clássico de Markowitz.

Palavras-chave: Finanças (otimização). Pesquisa operacional.

ABSTRACT

This work studied the minimum risk portfolio selection problem, approaching the uncertainty in the parameters of the models of aid to the decision taking. The behavior of measures of risk was evaluated with the incorporation of uncertainty in the estimators of its parameters through bayesian inference, indicating that the uncertainty can cause great financial impact to the companies, and that this impact depends on the employed esteem's methodology. The minimax model implemented, solves the minimum risk portfolio selection problem with the consideration of uncertainty in one of its parameters. Questions as robustness and performance had been analyzed demonstrating that the model minimax presents greater credibility as for the reach of the expect return, but demand bigger alterations in its solutions in comparison with the classic model of Markowitz.

Word-key: Finances (otimization). Operational research.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS.....	iv
RESUMO	vi
ABSTRACT	vii
SUMÁRIO.....	viii
LISTA DE FIGURAS	xi
LISTA DE TABELAS.....	xiii

1. INTRODUÇÃO	1
1.1 Organização do trabalho.....	2
2. CONCEITOS	4
2.1 Risco	4
2.1.1 Classificação do risco	5
2.1.2 Relação risco x retorno	6
2.2 Portfólio	6
2.2.1 Função utilidade e critério média-variância	8
2.2.2 A fronteira eficiente.....	10
2.3 Definições relativas ao portfólio	11
2.4 Medidas estatísticas de risco.....	13
2.4.1 Variância de um portfólio.....	13
2.4.2 Desvio médio absoluto	14
2.4.3 Valor em risco	14
2.5 Incerteza em estimadores.....	15
2.5.1 Inferência bayesiana	15
2.5.2 Teorema de Bayes e a atualização de informação	16
2.5.3 Inferência bayesiana para distribuição normal	17
2.5.4 Intervalos de credibilidade.....	19
2.6 Definição dos ativos que irão compor o portfólio a ser estudado	19

3. MEDIDAS DE RISCO COM INCERTEZA.....	26
3.1 Estimação de parâmetros.....	26
3.1.1 Estimadores clássicos	26
3.1.2 Modelo de suavização exponencial	27
3.1.3 Estimadores bayesianos.....	29
3.2 A matriz de covariâncias com incerteza	30
3.2.1 Metodologia proposta	31
3.2.2 Resultados.....	31
3.3 O valor em risco com incerteza	35
3.3.1 Diferentes formas do cálculo do VaR	36
3.3.2 Metodologia proposta	38
3.3.3 Resultados.....	39
3.3.3.1 <i>Análise individual de cada ativo</i>	39
3.3.3.2 <i>Análise do portfólio</i>	41
3.4 Conclusões preliminares	45
 4. PORTFÓLIOS COM INCERTEZA.....	 46
4.1 Modelo de Markowitz	48
4.1.1 Avaliação do impacto da incerteza na matriz de covariâncias	49
4.2 Modelo minimax	51
4.2.1 Estratégia de otimização	53
4.3 Resolução	56
4.3.1 Entrada de Dados.....	56
4.4 Resultados.....	57
4.4.1 Análise através de janelas de tempo	60
4.4.2 Análise de robustez.....	62
4.4.3 Análise de desempenho	67
4.5 Conclusões preliminares	68
 5. CONCLUSÕES	 70
 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	 72

APÊNDICES

A. INFERÊNCIA BAYESIANA.....	74
B. DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIAS.....	86
C. INFERÊNCIA BAYESIANA – APLICATIVO WINBUGS.....	87
D. JANELAS DE TEMPO	93
E. ALGORITMOS DE CÁLCULO – APLICATIVO MATLAB	94
F. RESULTADOS DO MODELO MINIMAX	103

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Classificação de riscos e o efeito da diversificação	7
Figura 2.2 - Concavidade e aversão ao risco	9
Figura 2.3 - Fronteira eficiente	11
Figura 2.4 - Cálculo da distribuição a posteriori para distribuição normal através de inferência bayesiana	18
Figura 2.5 - Evolução do preço da VALE5	22
Figura 2.6 - Evolução do preço da CSNA3	23
Figura 2.7 - Evolução do preço da PETR4	23
Figura 2.8 - Evolução do preço da EMBR4	23
Figura 2.9 - Evolução do preço da AMBV4	24
Figura 2.10 - Evolução do preço da TNLP4	24
Figura 2.11 - Evolução do preço da CMIG4	24
Figura 2.12 - Evolução do preço da ITAU4	25
Figura 3.1 - Fluxograma da análise da matriz de covariâncias	31
Figura 3.2 - Variância por tipo de estimação e janela de tempo para o portfólio 1	33
Figura 3.3 - Variância por tipo de estimação e janela de tempo para o portfólio 2	34
Figura 3.4 - Variância por tipo de estimação e janela de tempo para o portfólio 3	34
Figura 3.5 - Variância por tipo de estimação e janela de tempo para o portfólio 4	35
Figura 3.6 – Fluxograma da análise do valor em risco	39
Figura 3.7 - VaR calculado por tipo de estimação e ativo	41
Figura 3.8 – Valor em Risco (95%) por tipo de estimação e janela de tempo para o portfólio 1	43
Figura 3.9 – Valor em Risco (95%) por tipo de estimação e janela de tempo para o portfólio 2	43
Figura 3.10 – Valor em Risco (95%) por tipo de estimação e janela de tempo para o portfólio 3	44
Figura 3.11 – Valor em Risco (95%) por tipo de estimação e janela de tempo para o portfólio 4	44
Figura 4.1 - Fronteira eficiente para o modelo de Markowitz	49

Figura 4.2 – Part. de cada ativo no portfólio solução por retorno esperado (média da matriz de covariâncias).....	50
Figura 4.3 - Part. de cada ativo no portfólio solução por retorno esperado (int. de 5% da matriz de covariâncias).....	50
Figura 4.4 - Part. de cada ativo no portfólio solução por retorno esperado (int. de 95% da matriz de covariâncias).....	50
Figura 4.5 - Fronteira eficiente para o modelo minimax proposto.....	59
Figura 4.6 - Participação de cada ativo no portfólio solução pelo parâmetro w (I)	59
Figura 4.7 - Participação de cada ativo no portfólio solução pelo parâmetro w (II).....	60
Figura 4.8 – Fronteiras eficientes soluções do modelo minimax por janela de tempo.....	61
Figura 4.9 - Participação de cada ativo no portfólio por janela de tempo (minimax).....	63
Figura 4.10 - Participação de cada ativo no portfólio por janela de tempo (Markowitz – est.bayesiana).....	63
Figura 4.11 - Participação de cada ativo no portfólio por janela de tempo (Markowitz – est.clássica).....	64
Figura 4.12 - Participação de cada ativo no portfólio por janela de tempo (minimax).....	65
Figura 4.13 - Participação de cada ativo no portfólio por janela de tempo (Markowitz – est.bayesiana).....	65
Figura 4.14 - Participação de cada ativo no portfólio por janela de tempo (Markowitz – est.clássica).....	66
Figura 4.15 - Valor do portfólio ao longo do horizonte de investimento (retorno fixo)	67
Figura 4.16 - Valor do portfólio ao longo do horizonte de investimento (variância fixa)	68

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Classificação setorial das empresas listadas na BOVESPA.....	20
Tabela 2.2 - Ativos selecionados para compor o portfólio a ser estudado	22
Tabela 3.1 - Matriz de covariâncias estimada pelos estimadores clássicos.....	27
Tabela 3.2 - Matriz de covariâncias estimada pelo modelo de suavização exponencial.....	29
Tabela 3.3 - Matriz de covariâncias estimada pelos estimadores bayesianos (int. credibilidade: 5%)	30
Tabela 3.4 - Matriz de covariâncias estimada pelos estimadores bayesianos (média).....	30
Tabela 3.5 - Matriz de covariâncias estimada pelos estimadores bayesianos (int. credibilidade: 95%)	30
Tabela 3.6 – Variância por tipo de estimação e janela de tempo para o portfólio 1	32
Tabela 3.7 – Comparativo entre as variâncias médias por tipo de estimação para o portfólio 1	33
Tabela 3.8 - Composição dos portfólios analisados	34
Tabela 3.9 - Desvio-padrão de cada ativo por tipo de estimação	40
Tabela 3.10 - Valor em Risco (VaR) de cada ativo por tipo de estimação	40
Tabela 3.11 - Comparativo do VaR calculado por tipo de estimação e ativo	41
Tabela 3.12 – Valor em Risco (95%) por tipo de estimação e janela de tempo para o portfólio 1	42
Tabela 3.13 – Comparativo entre os Valores em Risco (95%) médios por tipo de estimação para o portfólio 1	42
Tabela 4.1 - Matriz de covariâncias estimada pelos estimadores bayesianos	56
Tabela 4.2 - Valor esperado do retorno por ativo e intervalo de credibilidade	57
Tabela 4.3 - Valor esperado do retorno por ativo (solução do problema (P)).....	58
Tabela 4.4 - Composição do portfólio pelo fator de aversão ao risco (w)	58
Tabela F.1 - Composição do portfólio pelo fator de aversão ao risco (w) – Janela 2	103
Tabela F.2 - Composição do portfólio pelo fator de aversão ao risco (w) – Janela 3	103
Tabela F.3 - Composição do portfólio pelo fator de aversão ao risco (w) – Janela 4	104
Tabela F.4 - Composição do portfólio pelo fator de aversão ao risco (w) – Janela 5	104
Tabela F.5 - Composição do portfólio pelo fator de aversão ao risco (w) – Janela 6	104
Tabela F.6 - Composição do portfólio pelo fator de aversão ao risco (w) – Janela 7	105

Tabela F.7 - Composição do portfólio pelo fator de aversão ao risco (w) – Janela 8	105
Tabela F.8 - Composição do portfólio pelo fator de aversão ao risco (w) – Janela 9	105
Tabela F.9 - Composição do portfólio pelo fator de aversão ao risco (w) – Janela 10	106
Tabela F.10 - Composição do portfólio pelo fator de aversão ao risco (w) – Janela 11	106
Tabela F.11 - Composição do portfólio pelo fator de aversão ao risco (w) – Janela 12	106

1

INTRODUÇÃO

O problema de composição de portfólio (carteira de investimentos) tem se tornado um tópico de extremo interesse de acadêmicos e profissionais que atuam na área de finanças atualmente, motivando-os a buscar modelos de alocação ótima de ativos que os auxiliem na tomada de decisão.

Dado um portfólio composto por ativos financeiros, um investidor racional busca a maximização do retorno do capital investido no portfólio de acordo com um dado nível de risco. Dessa forma, um algoritmo de otimização pode ser construído para a determinação da participação ótima de cada ativo financeiro na composição do portfólio.

O problema de otimização é importante por si só, e um número expressivo de pesquisadores tem somado esforços na busca de resolver diferentes modelos. Do ponto de vista de aplicação, a área de gestão financeira tanto na indústria, quanto no mercado de capitais, já utilizam em seu dia-a-dia este tipo de modelo, mas aprimoramentos são necessários para reduzir a distância (“gap”), ainda muito presente, entre a aplicação e as hipóteses dos modelos que podem ser muito restritivas.

Sendo assim, o problema de composição de portfólio envolve não só um grande esforço das ciências puras na área de exatas, pois há a necessidade da utilização de ferramentas matemáticas e estatísticas; mas também uma grande dedicação no entendimento das reais necessidades do gestor e quais serão as implicações de suas decisões. Portanto, este é um problema que envolve tanto conhecimento técnico quanto uma visão sistêmica da realidade do ambiente de decisão.

Neste trabalho, o que se quer modelar é a relação risco x retorno que envolve a decisão de quanto investir em cada ativo financeiro. Os retornos dos ativos financeiros podem ser considerados um processo estocástico, variando com o tempo, sendo necessário estimar alguns parâmetros, como por exemplo, o valor esperado e a variância dos retornos, entre outros, para a modelagem de seus comportamentos.

Os modelos de otimização têm quase sempre como variáveis de entrada os valores estimados dos parâmetros, usualmente, através da estatística Clássica. Como alternativa de avaliação do impacto da incerteza na estimação dos parâmetros, utilizaremos os conceitos da estatística Bayesiana, onde os estimadores fornecem uma distribuição de probabilidades para o valor dos parâmetros de uma distribuição. Para cada parâmetro tem-se um intervalo onde ele pode estar localizado, dado um grau de credibilidade.

A abordagem proposta no trabalho é muito recente e vem ao encontro das dificuldades encontradas na aplicação prática dos modelos propostos no dia-a-dia dos tomadores de decisão. Questões tais como robustez e desempenho de modelos serão analisadas com a incorporação de incerteza nos estimadores dos parâmetros, através de inferência bayesiana.

Neste contexto, o trabalho tem duas contribuições. A primeira é o estudo do modelo minimax proposto por Deng; Li e Wang (2005), que se propõe a resolver o problema de composição de portfólio através de um intervalo estimado para os retornos de cada ativo. O modelo é definido através da maximização de uma função objetivo do pior cenário para os valores esperados dos retornos. E a segunda é o estudo de modelos com a utilização de estatística Bayesiana, muito pouco explorado na literatura até o momento.

1.1 Organização do trabalho

O capítulo 1 é a introdução do trabalho, apresenta o tema a ser desenvolvido, assim como as contribuições fornecidas por ele, e sua organização.

O capítulo 2 descreve alguns conceitos necessários à compreensão do trabalho. Serão abordados alguns conceitos sobre risco e como mensurá-lo, assim como a teoria moderna de portfólio desenvolvida inicialmente por Markowitz (1952), e a incerteza em estimadores. Por fim, será definido os ativos que irão compor o portfólio a ser estudado.

O capítulo 3 é dedicado ao estudo das medidas de risco, variância e VaR (valor em risco). A variância ganhou destaque como medida de risco no modelo clássico de Markowitz (1952), sendo muito utilizada até então, por muitas instituições no auxílio à tomada de decisão. O

VaR é uma medida de risco regulamentada, e ganhou grande popularidade devido ao fato de representar uma medida de risco em apenas um número, tornando-se um padrão de mercado. A proposta deste capítulo é analisar o impacto da incerteza nos estimadores dessas medidas de risco, através de inferência bayesiana, visando avaliar as suas precisões. O foco é o emprego de técnicas de inferência bayesiana para a estimativa dos parâmetros.

O capítulo 4 tem como proposta avaliar o modelo de composição de portfólio proposto por Deng, Li e Wang (2005) que utiliza incerteza na estimação dos retornos de cada ativo. O foco é avaliar a robustez ao longo tempo e o desempenho do portfólio resultado do modelo em comparação com o modelo clássico de Markowitz (1952). Seu objetivo é analisar a implementação de um modelo que contemple incerteza em seus parâmetros através de inferência bayesiana.

O capítulo 5 é o capítulo de fechamento do trabalho. Neste capítulo serão apresentadas as conclusões e as recomendações para trabalhos futuros que podem ser desenvolvidos a partir das contribuições realizadas neste trabalho.

2

CONCEITOS

Este capítulo tem como objetivo apresentar conceitos e definições necessárias para uma melhor compreensão do trabalho. Serão abordados alguns conceitos sobre risco e como mensurá-lo, assim como a teoria moderna de portfólio e a incerteza em estimadores. Por fim, serão definidas as ações que irão compor o portfólio a ser estudado.

2.1 Risco

O problema de mensuração e controle de risco tem intrigado o homem desde os tempos mais remotos. A questão de prever e entender o futuro contempla desde a atribuição dos fatos às ações divinas, até estudos mais aprofundados de como controlar o risco. No século XX, Harry Markowitz (1952) revolucionou a maneira como o mercado financeiro toma decisões, definindo o risco na área financeira como sendo a variância dos retornos dos ativos, demonstrando a importância da diversificação dos investimentos.

Atualmente, o conceito de risco é utilizado diariamente na maioria das operações financeiras. Um operador de Bolsa trabalha com esse conceito durante várias horas por dia, grandes empresas utilizam o risco para avaliar seus investimentos e até mesmo as pequenas lojas de varejo utilizam a idéia do risco para calcular prestações, sendo neste último caso, muito comum o conceito de risco de crédito.

Uma definição simples de risco dada por Weston e Brigham (2000) é a que considera o risco como uma probabilidade de que algum acontecimento desfavorável venha a ocorrer. O risco de um investimento está ligado à probabilidade de se ganhar menos que o esperado.

2.1.1 Classificação do risco

Uma empresa, independente do seu ramo de atuação, sempre estará sujeita a riscos que podem impactar o bom resultado de seu negócio. Numa tentativa de identificar esses riscos, Jorion (1997) classificou o risco em operacional, estratégico e financeiro. Os riscos operacionais são assumidos de maneira voluntária a fim de gerar vantagem competitiva para a empresa, e incluem inovações no campo tecnológico, marketing e desenho do foco do negócio. Os riscos estratégicos têm correspondência direta com os cenários políticos e econômicos nos quais está inserida a organização. E os riscos financeiros estão relacionados às possíveis perdas no mercado financeiro.

Dentre os diversos riscos financeiros listados por Jorion (1997): risco de mercado, de crédito, de liquidez, operacional e legal; este trabalho abordará o risco de mercado, que está diretamente associado à volatilidade do retorno dos investimentos.

Toda empresa ou até mesmo pessoa física busca, ou deveria buscar o melhor rendimento possível para o seu patrimônio, dentro de níveis de risco que julgam aceitáveis. No mercado, existem diversas opções de investimento, cada qual com o seu risco característico, cuja administração está intrinsecamente relacionada com a volatilidade das variáveis financeiras. E segundo Jorion (1997), essa volatilidade seria o fator mais importante para a administração do risco.

Neste contexto, Blake; Elton e Gruber (1995) atentam para a maturidade de um investimento. Um investimento de longo prazo está mais sujeito a riscos, enquanto um investimento de curto prazo tende a ser mais seguro. Ao investir, outras análises também são importantes para dimensionar o risco. A classificação do investimento por agências conceituadas do ramo é um bom indicador para assegurar a credibilidade do emissor. A liquidez e o tipo de mercado em que se é negociado também são importantes dimensões do risco. Os investidores devem fazer uso desses indicadores, de forma a se precaverem contra eventos inesperados, que venham a culminar em prejuízos ou o não rendimento esperado de seu investimento.

O risco, no mercado financeiro, também pode ser conceitualmente dividido em dois tipos básicos: o risco diversificável e o risco não diversificável (DAMODARAN,1996). O primeiro

refere-se aos riscos que afetam um número pequeno de empresas, ou seja, se algo der errado apenas uma ou poucas empresas serão afetadas. Por exemplo, suponha que certa empresa invista em um projeto que foi previsto como viável e no decorrer do tempo verifica-se que na verdade o projeto está sendo inviável financeiramente; provavelmente isso afetará seu valor de mercado, mas certamente não afetará um número significativo de outras empresas. O segundo tipo de risco, o não diversificável é o mais preocupante, pois se refere a acontecimentos que afetam o mercado como um todo, como por exemplo, a diminuição da taxa base de juros, onde certamente todo o mercado será afetado com essa decisão.

2.1.2 Relação risco x retorno

A relação risco x retorno está intrinsecamente presente em qualquer investimento, e dá suporte para qualquer decisão em como investir um patrimônio. Questões como “quanto se espera de retorno deste investimento?”, e “até qual determinado nível de risco se está pré-disposto a assumir?”, são questões básicas que norteiam essa decisão da escolha de um investimento. Como possuem normalmente correlação positiva, ou seja, quanto maior o retorno esperado, maior será o risco envolvido no investimento, temos uma grande variedade de possibilidades. O risco que uma pessoa está disposta a assumir pode variar de acordo com fatores como idade, nível social, estado civil, número de filhos, perspectivas futuras, entre outros. Investimentos mais seguros, de pouco risco envolvido, como a poupança, por exemplo, são mais procurados por pessoas mais cautelosas, que chamaremos de avessas ao risco. Já investimentos mais ousados, que procuram uma rentabilidade maior, estão sujeitos a níveis maiores de risco, como por exemplo, a negociação de ações na bolsa, que possui uma elevada volatilidade em seus retornos.

2.2 Portfólio

A teoria de carteiras de investimentos (portfólios) foi introduzida por Harry Markowitz em 1952 (MARKOWITZ, 1952). Antes de seu trabalho ser publicado, os investidores concentravam-se exclusivamente na análise de risco-retorno de ativos individuais na

construção de seus portfólios. Logo, os investidores procuravam aqueles ativos que oferecessem as melhores oportunidades de rentabilidade com mínimo risco, para então construírem os seus portfólios.

Markowitz propõe que os investidores devem focar seus esforços na seleção de portfólios baseados nos riscos-retornos do portfólio como um todo, e não apenas compilarem portfólios onde os ativos possuem riscos-retornos atrativos. Para tanto, ele desenvolveu metodologias de avaliação e compensação do risco através da diversificação de investimentos. Dependendo da correlação entre os componentes do portfólio, consegue-se reduzir o risco do portfólio a níveis inferiores ao risco do investimento mais seguro que participa dele.

É importante ressaltar que a diversificação reduz apenas o risco diversificável, o que pode ser verificado na figura 2.1. Isso se deve ao fato de que quando se diversifica um investimento, o capital total pode sofrer baixa relativa a acontecimentos que afetam apenas um dos ativos que compõe a carteira, neste caso os outros ativos podem reduzir as perdas totais; porém o mesmo pode acontecer quando uma boa notícia afeta positivamente o valor de somente um ativo, os outros, não sendo afetados, impedirão que os ganhos aumentem na mesma proporção que aumentarão para o ativo que foi afetado pela boa notícia.

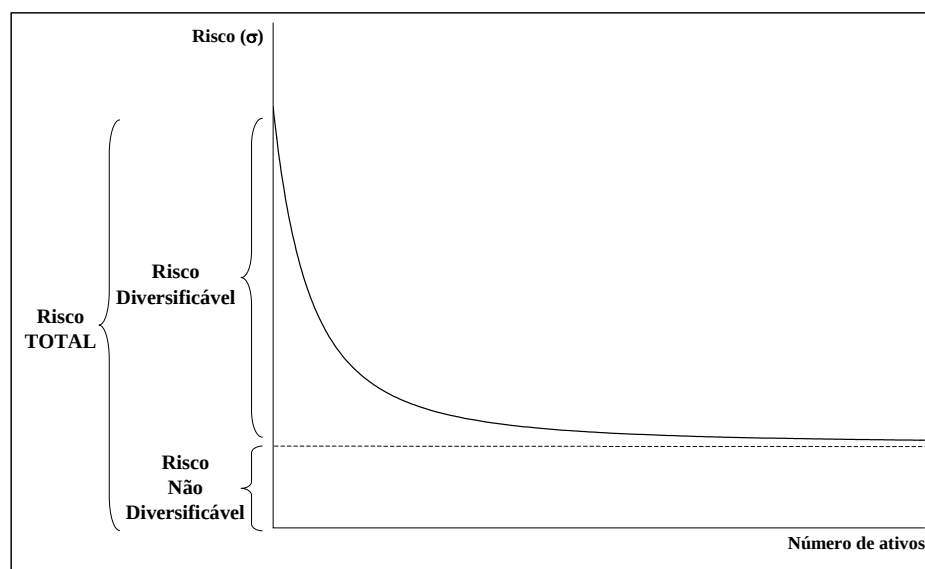


Figura 2.1 - Classificação de riscos e o efeito da diversificação

Markowitz tratou os retornos dos ativos de um portfólio como variáveis aleatórias, atribuindo-lhes medidas quantitativas de valores esperados, desvios padrões e correlações dos retornos

dos ativos. Desta forma, calcula-se o retorno esperado e o risco de qualquer carteira construída com esses ativos, de acordo com o peso de cada ativo no portfólio. Markowitz comenta que deve haver um portfólio que maximize o retorno esperado e minimize a variância, e este deve ser o portfólio recomendado para um investidor.

Em linhas gerais, o problema de composição de portfólio pode ser formalmente caracterizado como um problema que consiste em determinar uma carteira $x \in \mathfrak{R}^n$ de mínimo risco, satisfazendo às restrições:

$$X(R_0) = \left\{ x \in \mathfrak{R}^n \left| \sum_{j=1}^n x_j = 1 \quad \sum_{j=1}^n E(r_j)x_j \geq R_0 \right. \right\}, \quad (2.1)$$

onde $x \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor que determina a composição do portfólio, sendo x_j o percentual do j -ésimo ativo presente no portfólio. A constante R_0 é o retorno mínimo exigido pelo investidor, e $E(r_j)$ é o valor esperado do retorno do j -ésimo ativo (RIBEIRO; FERREIRA, 2005).

2.2.1 Função utilidade e critério média-variância

Num cenário onde diversos investimentos são possíveis, há a necessidade de classificá-los de maneira a auxiliar a escolha do investidor entre as diversas alternativas. Para tal finalidade, define-se uma função utilidade, que atribui a cada possível valor de riqueza W um número real $U(W) \in \mathfrak{R}$ que indica o real valor ou significância deste retorno para uma dada pessoa específica. Deve-se ressaltar, que cada pessoa possui sua própria curva de utilidade, sendo essa uma característica intrínseca a ela.

Em um ambiente regido por incertezas, a riqueza pode ser considerada como uma variável aleatória. Vale lembrar que uma variável aleatória normalmente distribuída é totalmente caracterizada pela sua média e variância. Desta forma, ao analisar dois investimentos diferentes, por exemplo X e Y , com respectivas riquezas representadas pelas variáveis

aleatórias x e y , o investidor deve optar por aquele investimento que apresentar maior valor esperado de sua utilidade, ou seja, $\max\{E[U(X)], E[U(Y)]\}$.

O principal propósito da definição de utilidade é determinar maneiras sistemáticas de classificar alternativas de investimento. Para o caso de um investidor racional (avesso ao risco), incrementos adicionais no risco demandam incrementos ainda maiores no retorno esperado. A aversão ao risco é garantida sempre que a função utilidade for côncava (LUENBERGER, 1998). Uma função U definida em um intervalo $[a, b] \in R$, é côncava se, para qualquer α , onde $0 \leq \alpha \leq 1$ e qualquer x e y no intervalo $[a, b]$, se verificar que $U[\alpha x + (1 - \alpha)y] \geq \alpha U(x) + (1 - \alpha)U(y)$. A função utilidade é dita com aversão ao risco em $[a, b]$ se for côncava em $[a, b]$. Esta definição é ilustrada na figura 2.2 a seguir.

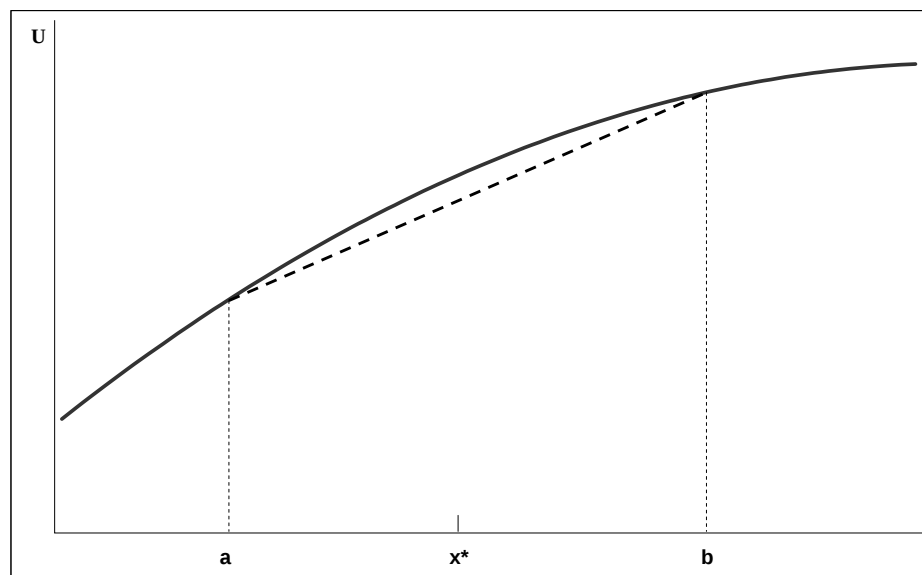


Figura 2.2 - Concavidade e aversão ao risco

O modelo de Markowitz caracteriza um investimento pelo critério da média-variância, ou seja, o retorno esperado ou medida de recompensa é caracterizado pela média dos retornos; e o risco envolvido mensurado através da variância destes. Quando todos os retornos são variáveis aleatórias normalmente distribuídas, pode-se adotar a mesma abordagem de utilidade esperada para qualquer função de utilidade aversa ao risco, para o critério de média-variância.

Considerando w a variável aleatória normalmente distribuída que representa a riqueza W , podemos inferir que a sua utilidade esperada também é definida por μ e σ :

$$E[U(W)] = f(\mu, \sigma) \quad (2.2)$$

Sendo assim, se U é aversa ao risco, então $f(\mu, \sigma)$ é crescente em relação à μ e decrescente em relação à σ (LUENBERGER, 1998). Considerando que todos os ativos que compõem o portfólio apresentem distribuição normal, qualquer combinação linear destes ativos gerará um portfólio representado por uma variável aleatória normalmente distribuída. Neste caso, o problema de composição de portfólio, passa a ser uma seleção do conjunto de ativos que maximiza a função $f(\mu, \sigma)$ em relação ao conjunto de pontos viáveis.

2.2.2 A fronteira eficiente

O trabalho de Markowitz (1952) mostrou o benefício da diversificação dos ativos de uma carteira. Ele considera que todos os tipos de investimentos estão disponíveis para todos os investidores, ou seja, uma carteira com n ativos pode ser construída de infinitas maneiras, cada uma combinando em proporções distintas os n ativos. Isto implica que, para um dado nível de risco, existirá uma carteira com maior retorno esperado que todas as outras e que para um dado nível de retorno esperado, haverá uma carteira de menor risco que todas as outras. A fronteira eficiente é o lugar geométrico onde se localizam os pontos que representam estas carteiras denominadas eficientes ou dominantes.

Cada investidor escolherá a carteira onde deseja investir de acordo com sua curva de utilidade. Os mais agressivos (mais propensos ao risco) desejarão um retorno maior que os mais conservadores (menos propensos ao risco).

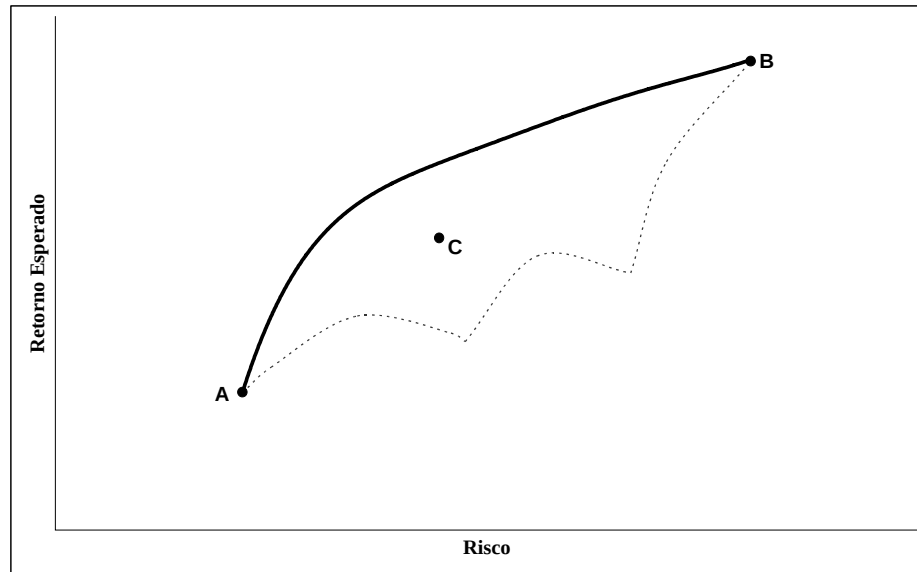


Figura 2.3 - Fronteira eficiente

A fronteira eficiente é o limite factível de combinações de maior benefício risco-retorno, não havendo nenhuma outra combinação além dela. Considerando a fronteira eficiente representada na figura 2.3, o investidor agressivo escolherá uma carteira mais próxima de B, enquanto o mais conservador escolherá uma próxima de A. O ponto C, situado dentro do conjunto de oportunidades, representa uma carteira dominada, isto é, existe uma carteira localizada em AB que para o mesmo nível de risco promete um retorno maior.

Vale ressaltar que a fronteira eficiente pode adquirir diferentes formatos para uma mesma seleção de ativos dependendo da medida de risco utilizada.

2.3 Definições relativas ao portfólio

Este item define alguns conceitos básicos que serão utilizados para a caracterização dos portfólios (RIBEIRO; VIANNA, 2004).

Definição 2.3.1 – Retorno de um ativo

O retorno de um ativo pode ser avaliado pela razão do seu valor no instante final do período de análise, sobre o seu valor no instante inicial do período de análise. Com o objetivo de

aproximar a distribuição de probabilidade dos retornos por uma distribuição normal, iremos utilizar o logaritmo neperiano dessa razão, que apresenta forma muito próxima a de uma distribuição normal.

Desta forma, dados P_0 (preço do ativo no instante t_0) e P_1 (preço do ativo no instante t_1), o retorno do ativo entre os instantes t_0 e t_1 é definido por:

$$R = \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right). \quad (2.3)$$

Definição 2.3.2 – Portfólio com n ativos

Um portfólio é caracterizado pela maneira como estão distribuídos os ativos que o compõem. Sendo x , um portfólio com n ativos, temos

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.4)$$

onde o valor x_i corresponde à fração do ativo i . O somatório da fração de cada um deles compõe o portfólio, ou seja $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.

Definição 2.3.3 – Retorno de um portfólio

O retorno de um portfólio é definido simplesmente como a soma ponderada dos retornos de cada ativo que a compõe, sendo que o peso de cada ativo é a fração do portfólio nele investido. Seja x_i a fração do portfólio alocado ao i -ésimo ativo e R_i o retorno associado a ele, temos que o retorno do portfólio é dado por:

$$R(x) = \sum_{i=1}^n R_i x_i. \quad (2.5)$$

2.4 Medidas estatísticas de risco

Formas de mensurar o risco foram sugeridas por diversos autores ao longo do tempo. São apresentadas a seguir, algumas dessas medidas (RIBEIRO; VIANNA, 2004).

2.4.1 Variância de um portfólio

A variância dos retornos esperados foi a primeira forma utilizada para mensurar o risco de um portfólio. O modelo de Markowitz (MARKOWITZ, 1952) se tornou um marco na história de finanças.

A variância do retorno do portfólio é definida por

$$\sigma^2(R(x)) = E\left((R(x) - E(R(x)))^2\right) = E\left[\left(\sum_{i=1}^n R_i x_i - E\left(\sum_{i=1}^n R_i x_i\right)\right)^2\right]. \quad (2.6)$$

E a covariância do retorno do portfólio é expressa por

$$\sigma_{ij} = E\left((R_i - E(R_i))(R_j - E(R_j))\right), \quad \forall i, j. \quad (2.7)$$

Desta forma, desenvolvendo-se estas expressões, verifica-se que

$$\sigma^2(R(x)) = x^T \Sigma x, \quad (2.8)$$

onde $\Sigma = [\sigma_{ij}]$ é a matriz de covariâncias dos ativos; ou seja, a variância do portfólio é definida como a soma das variâncias individuais de cada ativo e covariâncias entre pares de ativos do portfólio, de acordo com o peso de cada ativo na sua composição.

2.4.2 Desvio médio absoluto

Konno e Yamazaki (1991) utilizaram o desvio médio absoluto dos retornos dos ativos como medida de risco, numa estratégia de transformar o que antes era um problema de programação quadrática com o uso da variância, em um problema de programação linear; simplificando o trabalho computacional exigido. O desvio médio absoluto (*Mean Absolute Deviation* ou simplesmente MAD) do retorno do portfólio consiste no primeiro momento absoluto centrado, sendo dado pela expressão:

$$W_K(x) = E(|R(x) - E(R(x))|) = E\left[\left|\sum_{i=1}^n R_i x_i - E\left[\sum_{i=1}^n R_i x_i\right]\right|\right]. \quad (2.9)$$

2.4.3 Valor em risco

O valor em risco (Value at Risk ou VaR) é definido como a perda máxima ou mínimo retorno da carteira, a um nível de confiança de $1-\alpha$, dentro de um horizonte de tempo determinado, ou seja, busca responder o quanto se pode perder ou o mínimo que se pode ganhar em um horizonte de tempo e com qual probabilidade.

Acerbi e Tasche (2002) definiram o VaR da seguinte forma: sendo P uma medida de probabilidade associada a uma variável aleatória R que determina o retorno logarítmico de um ativo, o VaR, ao nível de confiança $1-\alpha$, é definido como:

$$VaR^{1-\alpha}(R) = Q_\alpha(R), \quad (2.10)$$

em que

$$Q_\alpha(R) = \inf \{w \in \mathbb{R} \mid P(R \leq w) > \alpha\}. \quad (2.11)$$

Sendo assim, o VaR, em um único número, fornece uma medida concisa de risco de mercado, bem como a probabilidade de uma oscilação adversa.

2.5 Incerteza em estimadores

O problema de estimação de parâmetros é muito abordado em estatística. De maneira simplista, obtém-se uma amostra da variável aleatória X , cuja lei de probabilidades é conhecida, com exceção aos parâmetros que a definem. O problema da estimação consiste em utilizar estas observações para obter estimativas dos parâmetros da distribuição da população de X . Por exemplo, no caso de uma variável aleatória que apresenta média μ e desvio padrão σ , seleciona-se uma amostra de n elementos. São então calculados os estimadores de média $\bar{x}$ e de desvio padrão $\hat{\sigma}$ e é assumido que $\bar{x}$ tem distribuição normal.

A principal pergunta que deve ser respondida na estimação de parâmetros é o quão razoável é assumir que os valores estimados a partir da amostra correspondem à realidade da população original.

A composição dos modelos de otimização de portfólio está fortemente baseada na estimação de parâmetros. Por exemplo, o modelo de Markowitz tem sua base na matriz de covariâncias e no valor esperado dos retornos. A partir da observação do retorno dos ativos de uma determinada amostra, determina-se o estimador $\hat{\Sigma}$ da matriz de covariâncias Σ da população. Os retornos esperados dos n ativos que compõem o portfólio, $E[R_i]$, são estimados através do estimador de média $\bar{r}_i$.

O problema de otimização do portfólio apresenta uma série de incertezas relacionadas, entre outros fatores, à estimação de parâmetros, o que pode comprometer os resultados. O intuito deste trabalho é procurar alternativas que minimizem o efeito das incertezas dos parâmetros na solução final.

2.5.1 Inferência bayesiana

A informação que se tem sobre um parâmetro θ de um modelo é fundamental na estatística. O verdadeiro valor de θ é desconhecido e o objetivo é tentar reduzir este desconhecimento. A

estatística Bayesiana trata a incerteza a respeito do valor de θ através de modelos probabilísticos para os parâmetros. Desta forma, não existe distinção entre variáveis observáveis e os parâmetros de um modelo estatístico, todos são considerados variáveis aleatórias. Os estimadores bayesianos fornecem uma distribuição de probabilidades para o valor dos parâmetros de uma distribuição; e não somente um valor fixo. Para cada parâmetro tem-se um intervalo onde o parâmetro pode estar localizado, dado um grau de credibilidade.

2.5.2 Teorema de Bayes e a atualização de informação

O teorema de Bayes indica como atualizar ou revisar uma opinião à luz de uma nova evidência, ou seja, ele é usado na inferência estatística para atualizar estimativas da probabilidade, quantificando qualquer aumento de informação sobre determinado parâmetro que se quer medir.

Dada uma variável de interesse θ , sobre o qual não se possui informação total, a informação que se dispõe sobre θ até o momento, pode ser resumida probabilisticamente através de $p(\theta)$, que é definida como distribuição *a priori* de θ .

Observando-se uma variável aleatória X relacionada com θ , onde $p(X=x | \theta)$ expressa a dependência entre X e θ , o conhecimento sobre a distribuição dos valores de θ será aumentado, pois a quantidade de informação sobre θ é aumentada. A probabilidade $p(X=x | \theta)$ é definida como *verossimilhança* ou *plausibilidade*.

Sendo assim, com o conhecimento da *priori* sobre θ , e com a nova informação observada através da variável aleatória X , chega-se a uma nova distribuição de probabilidade para θ definida como distribuição *a posteriori* de θ , atualizada através do teorema de Bayes, onde:

$$p(\theta | x) \propto p(x | \theta) \times p(\theta), \quad (2.12)$$

ou

$$\text{distribuição a posteriori} \propto \text{verossimilhança} \times \text{distribuição a priori}, \quad (2.13)$$

sendo $\propto$, um símbolo de proporcionalidade (LEE, 2004).

Portanto, partindo de uma distribuição a priori, com a observação de um novo experimento, chega-se a uma distribuição a posteriori, mais rica em informação do que a priori. Para maiores detalhes sobre o teorema de Bayes e sobre como ele é utilizado para a atualização da informação, ver o Apêndice A.

2.5.3 Inferência bayesiana para distribuição normal

No problema de interesse se pretende medir os parâmetros θ (média) e ϕ (variância) de uma variável que possui distribuição normal. O algoritmo de cálculo das distribuições a posteriori de θ e ϕ é representado no fluxograma a seguir (LEE, 2004).

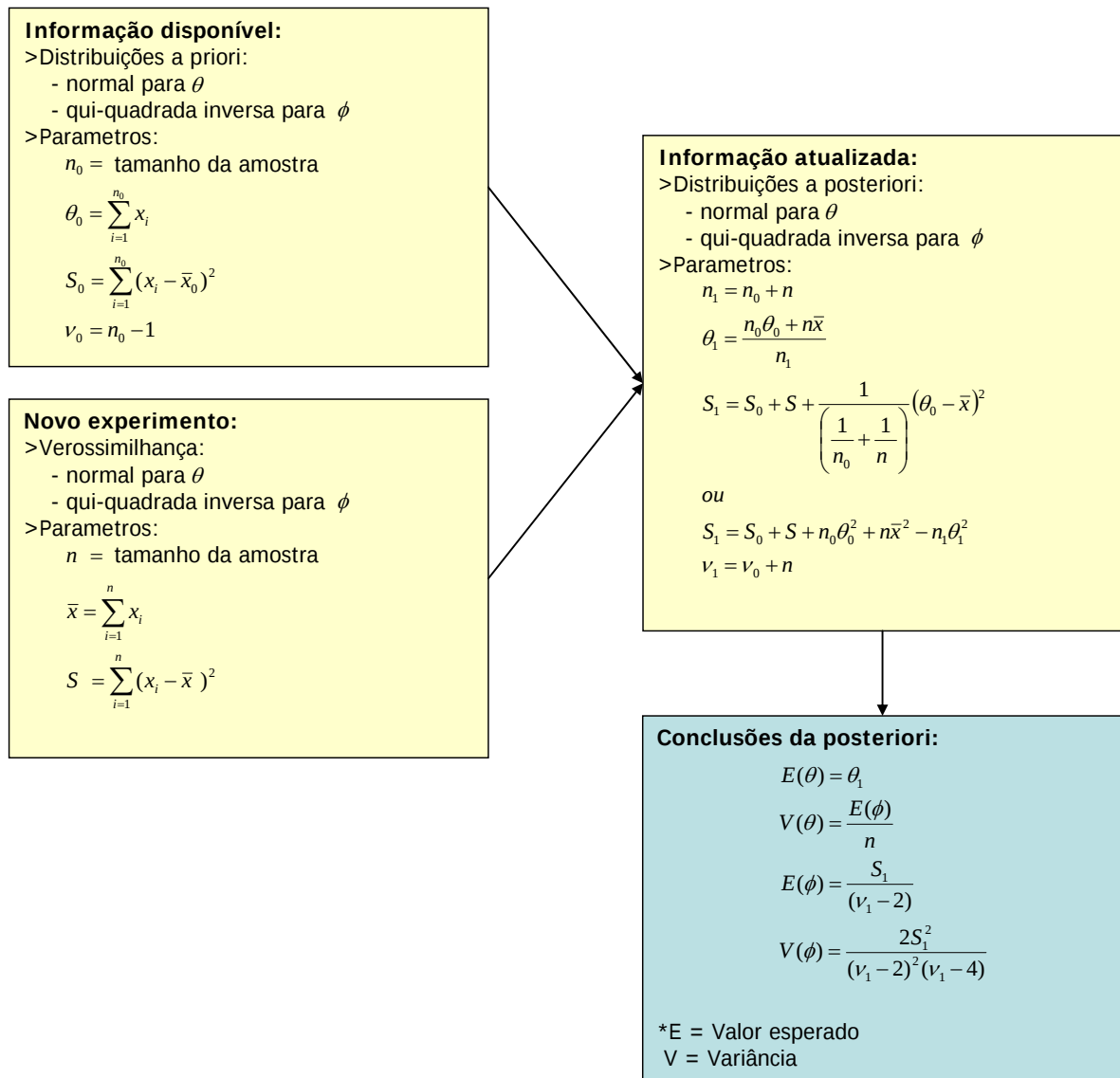


Figura 2.4 - Cálculo da distribuição a posteriori para distribuição normal através de inferência bayesiana

A partir das distribuições a priori e verossimilhança é possível calcular os parâmetros da distribuição a posteriori da variável de interesse que se quer estudar. As conclusões da posteriori definem o valor esperado (E) e a variância (V) de cada parâmetro baseado nas características das distribuições normal e qui-quadrada inversa, que são contempladas no apêndice B.

A distribuição a posteriori calculada será a distribuição a priori para uma nova atualização da informação através de um novo experimento ou aumento de informação. Para maiores detalhes sobre o cálculo da distribuição a posteriori e as premissas utilizadas na inferência bayesiana ver o apêndice A.

2.5.4 Intervalos de credibilidade

Na estatística Clássica, um estimador pontual diz onde se espera que o valor do parâmetro se encontre, mas nada afirma a respeito da confiança que se tem nesse número. Para lidar com esse problema é comum que se apresente um intervalo de confiança, no qual espera-se que o parâmetro se encontre. De qualquer forma, isto não quer dizer que o valor do parâmetro se encontra dentro deste intervalo, isto porque, em estatística Clássica, afirmações probabilísticas sobre parâmetros são proibidas, por serem erradas (MARTINS, 2006).

No caso da estatística Bayesiana, em princípio, uma vez que conhecemos a distribuição a posteriori, toda a informação sobre o parâmetro está contida ali. No entanto, o formato de intervalos de confiança é útil por ser de fácil compreensão, além de ser uma forma já tradicional de apresentar os resultados contidos em uma inferência. O resultado bayesiano equivalente são os intervalos de credibilidade, que são basicamente intervalos de confiança feitos a partir da posteriori, e portanto, são intervalos onde se pode realmente falar sobre a probabilidade do valor correto do parâmetro se encontrar ali. Um intervalo de credibilidade para uma credibilidade dada $1-\alpha$ é simplesmente o menor intervalo onde, após a inferência, espera-se encontrar o parâmetro com probabilidade $1-\alpha$.

Neste trabalho será considerado que a média possui distribuição normal e que a variância possui distribuição qui-quadrada inversa (LEE, 2004). Para o estudo do portfólio será considerado que a distribuição das médias é uma normal multivariada e que a distribuição da matriz de covariâncias é uma distribuição de Wishart (ANDERSON, 1984).

2.6 Definição dos ativos que irão compor o portfólio a ser estudado

Esse trabalho abordará o problema de composição de um portfólio de ações, que são títulos de renda variável vendidos a pessoas físicas e jurídicas. Elas representam a menor fração do capital social de uma empresa e podem ser de três tipos:

- o ON – Denominadas Ordinárias;
- o PN – Denominadas Preferenciais;
- o PNA, PNB ou PNC: que são ações preferenciais que possuem características distintas definidas por meio do estatuto de cada empresa.

O Índice Bovespa (IBOVESPA) é o mais importante indicador do desempenho médio das cotações do mercado de ações brasileiro. Compreende o valor atual de um portfólio teórico formado pelos principais papéis negociados na BOVESPA (Bolsa de Valores de São Paulo), representando o desempenho médio das ações que compõem o índice. A sua finalidade básica é a de servir como *benchmark* do comportamento do mercado.

As empresas negociadas na Bovespa podem ser classificadas de acordo com os setores e sub-setores econômicos em que elas atuam. Essa classificação pode ser visualizada na tabela 2.1 abaixo:

Tabela 2.1 - Classificação setorial das empresas listadas na BOVESPA

SETOR	SUB-SETOR
Petróleo e Gás	Petróleo e Gás
Materiais Básicos	Mineração Siderurgia e Metalurgia Químicos Madeira e Papel Embalagens Materiais Diversos
Bens Industriais	Material de Transporte Equipamentos Elétricos Máquinas e Equipamentos Serviços Comércio
Construção e Transporte	Construção e Engenharia Transporte
Consumo Não Cíclico	Alimentos Bebidas Fumo Produtos de Uso Pessoal e de Limpeza Saúde Comércio
(continua)	

SETOR	SUB-SETOR
<i>(continuação)</i>	
Consumo Cíclico	Tecidos, Vestuário e Calçados
	Utilidades Domésticas
	Mídia
	Hotelaria
	Lazer
	Diversos
	Comércio
Tecnologia da Informação	Computadores e Equipamentos
	Programas e Serviços
Telecomunicações	Telefonia Fixa
	Telefonia Móvel
Utilidade Pública	Energia Elétrica
	Água e Saneamento
	Gás
Financeiro e Outros	Intermediários Financeiros
	Securitizadoras de Recebíveis
	Previdência e Seguros
	Exploração de Imóveis
	Holdings Diversificadas
	Outros
	Fundos

De acordo com Markowitz (1952) a adequação da diversificação de um portfólio não depende somente da quantidade de ativos que o compõe. Isto porque a probabilidade do desempenho de empresas de um mesmo setor ser pior num mesmo período é maior do que empresas de diferentes ramos de negócios.

O mesmo raciocínio pode ser utilizado para a composição de um portfólio. A fim de minimizar o seu risco, os investidores devem optar por empresas com características econômicas não similares. Geralmente, essas empresas possuem correlação menor que as empresas de um mesmo setor econômico.

Baseado nestas informações, foi respeitado os seguintes critérios para a seleção dos ativos:

- 1) Cada ação deveria ser negociada na Bovespa desde janeiro de 2002, para fim de composição de histórico.

- 2) Cada setor econômico listado na Bovespa foi representado com uma ação, exceto os setores de ‘Construção e Transporte’, ‘Tecnologia da Informação’ e ‘Consumo Cíclico’ que não foram contemplados e o setor de ‘Materiais Básicos’ que foi contemplado com 2 ações, totalizando 8 ações.
- 3) Dentro de cada setor, optou-se por ações que apresentassem um expressivo volume de negociação, evitando problemas de falta de liquidez para mudanças de posições.
- 4) As ações devem fazer parte do índice Bovespa, facilitando a avaliação do desempenho da carteira através do benchmarking com o índice do setor.

Respeitando estes critérios, serão estudadas neste trabalho as seguintes ações:

Tabela 2.2 - Ativos selecionados para compor o portfólio a ser estudado

NÚMERO	SETOR ECONÔMICO	AÇÃO	CÓDIGO
1	Materiais Básicos / Mineração	Vale R Doce PNA	VALE5
2	Materiais Básicos / Siderurgia	Sid Nacional ON	CSNA3
3	Petróleo e Gás	Petrobrás	PETR4
4	Bens Industriais	Embraer PN	EMBR4
5	Consumo Não Cíclico	Ambev PN	AMBV4
6	Telecomunicações	Telemar PN	TNLP4
7	Utilidade Pública	Cemig PN	CMIG4
8	Financeiro e Outros	Itaubanco PN	ITAU4

Para a elaboração dos estudos realizados neste trabalho foram observados os preços de fechamento diários das ações no período de 28 de dezembro de 2001 a 31 de maio de 2006. A evolução dos preços destas ações pode ser visualizada a seguir:

- Vale do Rio Doce (VALE5)

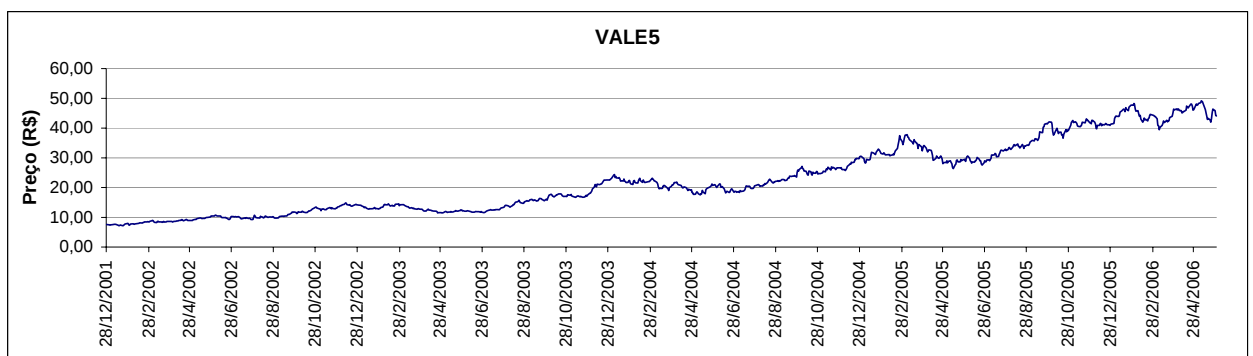


Figura 2.5 - Evolução do preço da VALE5

- Siderurgia Nacional (CSNA3)

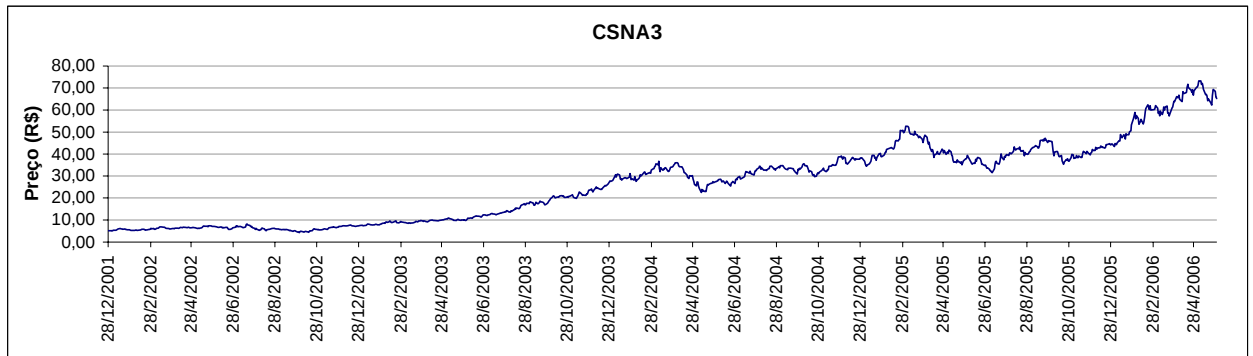


Figura 2.6 - Evolução do preço da CSNA3

- Petrobrás (PETR4)

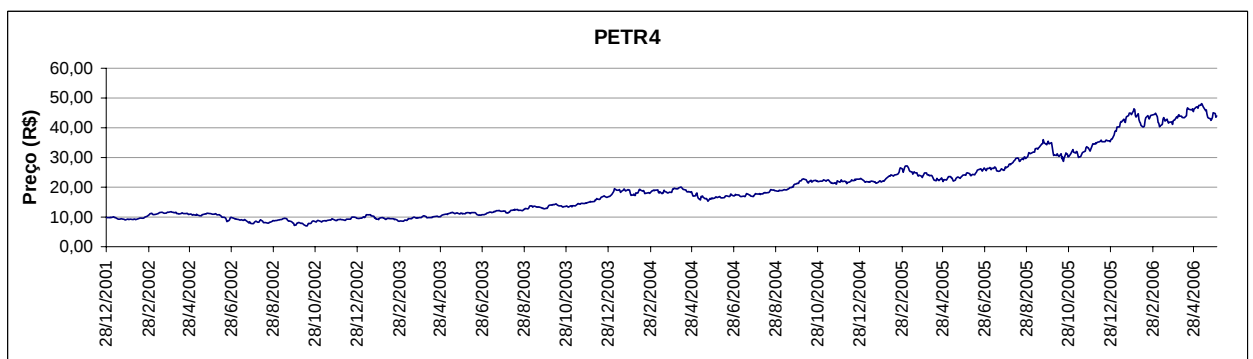


Figura 2.7 - Evolução do preço da PETR4

- Embraer (EMBR4)

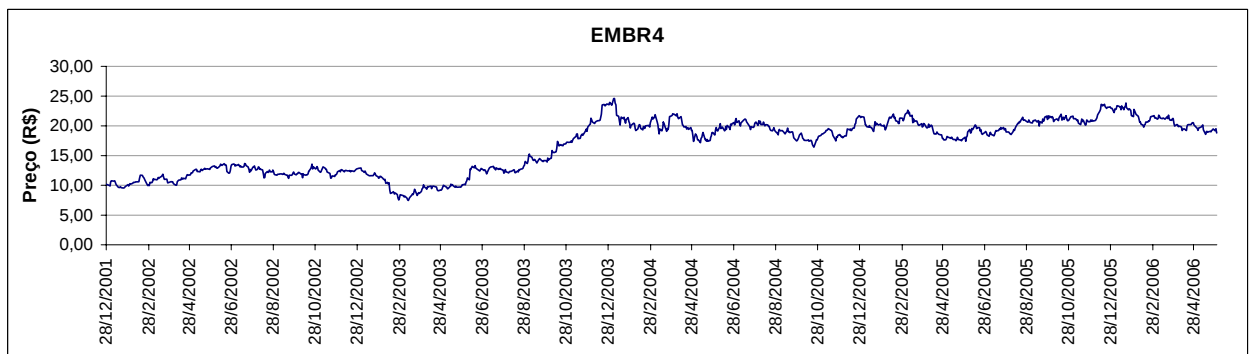


Figura 2.8 - Evolução do preço da EMBR4

- Ambev (AMBV4)

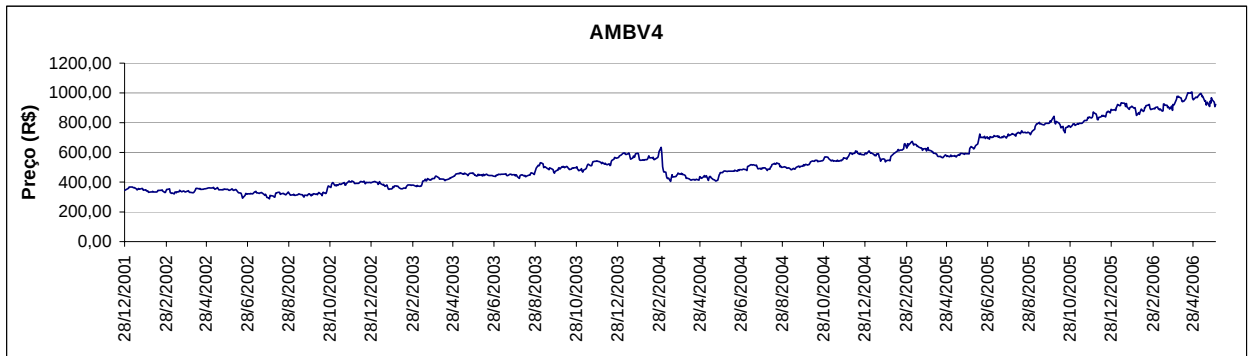


Figura 2.9 - Evolução do preço da AMBV4

- Telemar (TNLP4)

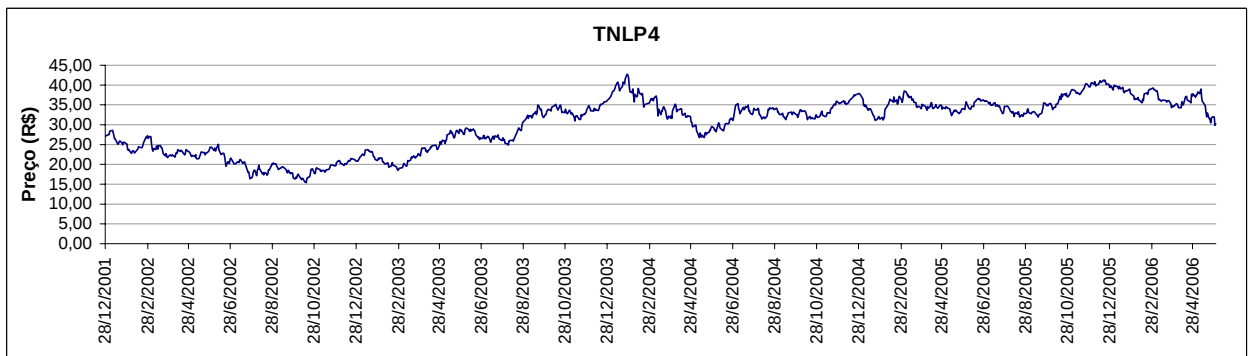


Figura 2.10 - Evolução do preço da TNLP4

- Cemig (CMIG4)

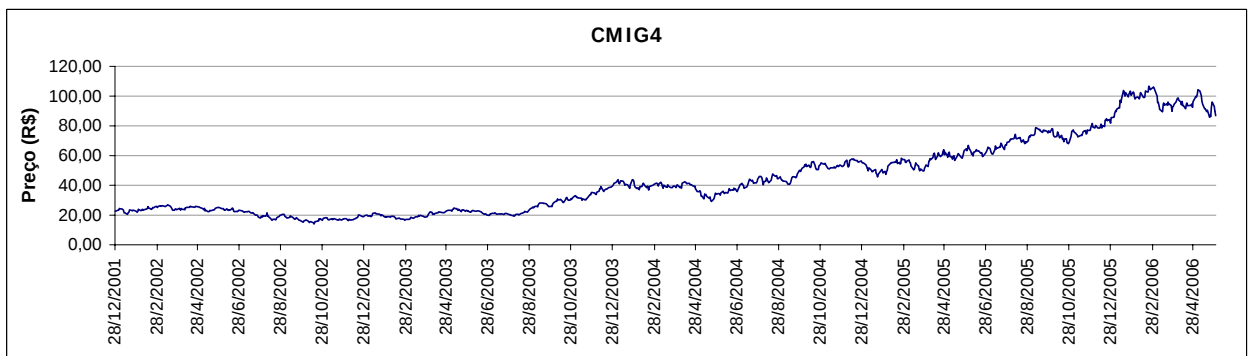


Figura 2.11 - Evolução do preço da CMIG4

- Itaúbanco (ITAU4)

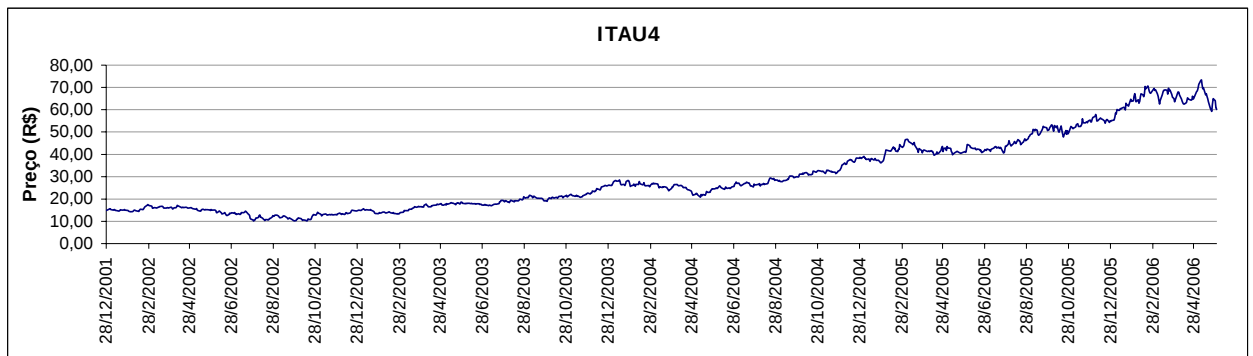


Figura 2.12 - Evolução do preço da ITAU4

3

MEDIDAS DE RISCO COM INCERTEZA

As medidas de risco são a base para qualquer modelo de auxílio à tomada de decisão no que se refere ao problema de gestão de portfólio. Os estimadores de risco, como qualquer estimador, estão sujeitos às incertezas em suas estimações, o que pode comprometer os resultados dos modelos.

Dentro deste escopo, a proposta deste capítulo é analisar o impacto da incerteza nos estimadores das medidas de risco, variância e valor em risco, de portfólios, através de estimativa bayesiana e simulação, visando avaliar suas precisões. O foco é o emprego de técnicas de inferência bayesiana para a estimativa dos parâmetros. A avaliação através de simulação é motivada pela sua grande utilização em modelos multiperíodo.

3.1 Estimação de parâmetros

Os parâmetros da distribuição dos retornos logarítmicos de um ativo podem ser estimados através de diversos métodos, tanto da estatística clássica, como da estatística bayesiana. Serão analisados neste capítulo os seguintes parâmetros: a variância do ativo e, para o caso de um portfólio de ativos, a covariância entre eles. A seguir, serão apresentados os três tipos de estimadores abordados neste trabalho, assim como, o resultado da estimação para a matriz de covariâncias da série histórica dos retornos dos ativos definidos na seção 2.6 deste trabalho, no período de 2 de janeiro de 2002 até 3 de janeiro de 2006, para cada um dos estimadores.

3.1.1 Estimadores clássicos

Dado um conjunto de t observações $R^* = \{r_1 \dots r_t\}$, da variável aleatória R com distribuição normal, o estimador da variância desta distribuição é dado por

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^t \frac{(r_i - \bar{r})^2}{t-1}, \quad (3.1)$$

onde os r_i são os retornos da amostra, $\bar{r}$ é a média da amostra e t o número de observações.

A covariância entre os retornos de dois ativos A e B, pode ser estimada por

$$\hat{\sigma}_{AB} = \sum_{i=1}^t \frac{(r_{A,i} - \bar{r}_A)(r_{B,i} - \bar{r}_B)}{t-1}, \quad (3.2)$$

onde os $r_{A,i}$ e $r_{B,i}$ são os retornos da amostra dos ativos A e B, respectivamente, e $\bar{r}_A$ e $\bar{r}_B$ são as médias das amostras.

A tabela 3.1 abaixo representa a matriz de covariâncias estimada através dos estimadores clássicos para o período de 2 de janeiro de 2002 até 3 de janeiro de 2006.

Tabela 3.1 - Matriz de covariâncias estimada pelos estimadores clássicos

	VALE5	CSNA3	PETR4	EMBR4	AMBV4	TNLP4	CMIG4	ITAU4
VALE5	0,000396	0,000217	0,000145	0,000112	0,000084	0,000120	0,000123	0,000099
CSNA3	0,000217	0,000784	0,000244	0,000160	0,000163	0,000305	0,000318	0,000235
PETR4	0,000145	0,000244	0,000406	0,000125	0,000137	0,000256	0,000278	0,000215
EMBR4	0,000112	0,000160	0,000125	0,000575	0,000101	0,000149	0,000142	0,000102
AMBV4	0,000084	0,000163	0,000137	0,000101	0,000351	0,000154	0,000177	0,000162
TNLP4	0,000120	0,000305	0,000256	0,000149	0,000154	0,000489	0,000363	0,000255
CMIG4	0,000123	0,000318	0,000278	0,000142	0,000177	0,000363	0,000768	0,000311
ITAU4	0,000099	0,000235	0,000215	0,000102	0,000162	0,000255	0,000311	0,000463

3.1.2 Modelo de suavização exponencial

Outra classe de estimadores, com aplicação específica em séries temporais são os modelos de suavização exponencial. O EWMA (Exponential Weighted Moving Average), ou média móvel ponderada com alisamento exponencial é uma técnica, sugerida pela metodologia Riskmetrics do banco JPMorgan (MORGAN,1994), utilizada na modelagem da volatilidade de ativos.

Dadas as observações $R^* = \{r_1 \dots r_t\}$ que constituem uma série temporal, o estimador pela técnica do EWMA para a variância no instante t é dado por

$$\hat{\sigma}_t^2 = \alpha \hat{\sigma}_{t-1}^2 + (1-\alpha) r_{t-1}^2 \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (3.3)$$

A expressão sugere que a variância do retorno de um ativo, num dado instante de tempo, é composta por dois termos. O primeiro termo expressa a dependência temporal da variância dos retornos. O segundo representa a contribuição da observação mais recente para a variância estimada. Além disso, pode-se inferir da expressão que quanto maior o fator de decaimento α , maior é o peso dado à variância mais recente.

O mesmo princípio de cálculo pode ser estendido para a estimação da covariância entre dois ativos. Assim, a covariância entre dois ativos A e B, pode ser definida por

$$\hat{\sigma}_{AB} = \alpha \hat{\sigma}_{A,t-1} \hat{\sigma}_{B,t-1} + (1-\alpha) r_{A,t-1} r_{B,t-1} \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (3.4)$$

A escolha do valor do parâmetro α é muitas vezes realizada de forma arbitrária. Entretanto, a metodologia Riskmetrics sugere um procedimento para a escolha de um α ótimo baseado no erro de predição um passo à frente, onde o erro de predição um passo à frente é definido como $\varepsilon_{t+1/t} = r_{t+1}^2 - \sigma_{t+1/t}^2$. O mesmo procedimento pode ser utilizado para o α empregado no cálculo das covariâncias. Para maiores detalhes desses procedimentos, ver MORGAN(1994).

Neste trabalho será utilizado o valor $\alpha=0,97$ para todos os cálculos de variâncias e covariâncias, pois esse é o valor usual utilizado pelos agentes do mercado financeiro brasileiro na determinação dos parâmetros dos diversos ativos.

A matriz de covariâncias estimada através do modelo de estimação exponencial para o período de 2 de janeiro de 2002 até 3 de janeiro de 2006, é dada na tabela 3.2 a seguir.

Tabela 3.2 - Matriz de covariâncias estimada pelo modelo de suavização exponencial

	VALE5	CSNA3	PETR4	EMBR4	AMBV4	TNLP4	CMIG4	ITAU4
VALE5	0,000299	0,000354	0,000328	0,000303	0,000202	0,000238	0,000365	0,000319
CSNA3	0,000354	0,000431	0,000398	0,000369	0,000262	0,000286	0,000445	0,000388
PETR4	0,000328	0,000398	0,000367	0,000341	0,000239	0,000265	0,000410	0,000358
EMBR4	0,000303	0,000369	0,000341	0,000316	0,000225	0,000245	0,000381	0,000333
AMBV4	0,000202	0,000262	0,000239	0,000225	0,000177	0,000169	0,000270	0,000236
TNLP4	0,000238	0,000286	0,000265	0,000245	0,000169	0,000191	0,000295	0,000258
CMIG4	0,000365	0,000445	0,000410	0,000381	0,000270	0,000295	0,000459	0,000400
ITAU4	0,000319	0,000388	0,000358	0,000333	0,000236	0,000258	0,000400	0,000350

3.1.3 Estimadores bayesianos

Os estimadores bayesianos fornecem, a partir da informação previamente conhecida e dos dados disponíveis, uma distribuição de probabilidades para o valor dos parâmetros de uma distribuição. Para cada parâmetro tem-se um intervalo onde o parâmetro pode estar localizado, dado um grau de credibilidade.

Para a distribuição de um ativo, normal, assume-se que a sua variância possui uma distribuição qui-quadrada inversa (LEE, 2004). No caso multivariado, ou seja, de um portfólio de ativos, assume-se que a matriz de covariâncias possui uma distribuição de Wishart (ANDERSON, 1984), considerando que a distribuição dos retornos é uma distribuição normal multivariada.

Os parâmetros foram estimados utilizando o programa WinBugs®, que realiza a análise de modelos estatísticos através do método de Monte Carlo de cadeias de Markov (MCMC – Markov Chain Monte Carlo) e fornece informações sobre os parâmetros desses modelos. O modelo utilizado para a estimação dos parâmetros através do programa WinBugs® é explicitado no apêndice C, assim como suas entradas e saídas. Vale ressaltar, que se procurou utilizar uma distribuição a priori não informativa, indicando a falta de informação anterior sobre os parâmetros ou a não-influência da informação anterior sobre a estimação.

Para o período de 2 de janeiro de 2002 até 3 de janeiro de 2006, tem-se uma distribuição de probabilidades para a matriz de covariâncias estimada através dos estimadores bayesianos, cujos intervalos de 5%, média e de 95% de credibilidade são contemplados nas tabelas 3.3, 3.4 e 3.5 a seguir.

Tabela 3.3 - Matriz de covariâncias estimada pelos estimadores bayesianos (int. credibilidade: 5%)

	VALE5	CSNA3	PETR4	EMBR4	AMBV4	TNLP4	CMIG4	ITAU4
VALE5	0,000378	0,000187	0,000123	0,000087	0,000064	0,000097	0,000094	0,000077
CSNA3	0,000187	0,000738	0,000213	0,000124	0,000135	0,000270	0,000275	0,000202
PETR4	0,000123	0,000213	0,000386	0,000099	0,000116	0,000230	0,000247	0,000190
EMBR4	0,000087	0,000124	0,000099	0,000544	0,000077	0,000121	0,000107	0,000075
AMBV4	0,000064	0,000135	0,000116	0,000077	0,000336	0,000131	0,000149	0,000140
TNLP4	0,000097	0,000270	0,000230	0,000121	0,000131	0,000464	0,000327	0,000228
CMIG4	0,000094	0,000275	0,000247	0,000107	0,000149	0,000327	0,000723	0,000277
ITAU4	0,000077	0,000202	0,000190	0,000075	0,000140	0,000228	0,000277	0,000440

Tabela 3.4 - Matriz de covariâncias estimada pelos estimadores bayesianos (média)

	VALE5	CSNA3	PETR4	EMBR4	AMBV4	TNLP4	CMIG4	ITAU4
VALE5	0,000407	0,000218	0,000145	0,000112	0,000085	0,000121	0,000124	0,000100
CSNA3	0,000218	0,000794	0,000244	0,000160	0,000164	0,000306	0,000319	0,000236
PETR4	0,000145	0,000244	0,000416	0,000125	0,000137	0,000256	0,000279	0,000215
EMBR4	0,000112	0,000160	0,000125	0,000586	0,000101	0,000150	0,000143	0,000102
AMBV4	0,000085	0,000164	0,000137	0,000101	0,000362	0,000154	0,000177	0,000162
TNLP4	0,000121	0,000306	0,000256	0,000150	0,000154	0,000500	0,000364	0,000256
CMIG4	0,000124	0,000319	0,000279	0,000143	0,000177	0,000364	0,000779	0,000312
ITAU4	0,000100	0,000236	0,000215	0,000102	0,000162	0,000256	0,000312	0,000473

Tabela 3.5 - Matriz de covariâncias estimada pelos estimadores bayesianos (int. credibilidade: 95%)

	VALE5	CSNA3	PETR4	EMBR4	AMBV4	TNLP4	CMIG4	ITAU4
VALE5	0,000437	0,000250	0,000168	0,000139	0,000105	0,000145	0,000154	0,000123
CSNA3	0,000250	0,000855	0,000278	0,000197	0,000193	0,000343	0,000363	0,000270
PETR4	0,000168	0,000278	0,000448	0,000152	0,000159	0,000284	0,000312	0,000241
EMBR4	0,000139	0,000197	0,000152	0,000630	0,000126	0,000180	0,000179	0,000130
AMBV4	0,000105	0,000193	0,000159	0,000126	0,000389	0,000179	0,000207	0,000186
TNLP4	0,000145	0,000343	0,000284	0,000180	0,000179	0,000538	0,000403	0,000285
CMIG4	0,000154	0,000363	0,000312	0,000179	0,000207	0,000403	0,000837	0,000348
ITAU4	0,000123	0,000270	0,000241	0,000130	0,000186	0,000285	0,000348	0,000509

3.2 A matriz de covariâncias com incerteza

A matriz de covariâncias é a base para o cálculo da variância do portfólio. A variância ganhou destaque como medida de risco no modelo clássico de Markowitz (1952) de composição de portfólio de mínimo risco, sendo muito utilizada até então, por muitas instituições no auxílio à tomada de decisão. Iremos agora, avaliar a precisão da variância do portfólio, e sua robustez ao longo do tempo.

3.2.1 Metodologia proposta

Para a avaliação do impacto entre os estimadores da variância, comparamos os seus valores calculados através dos diferentes estimadores, conforme ilustra a figura 3.1.

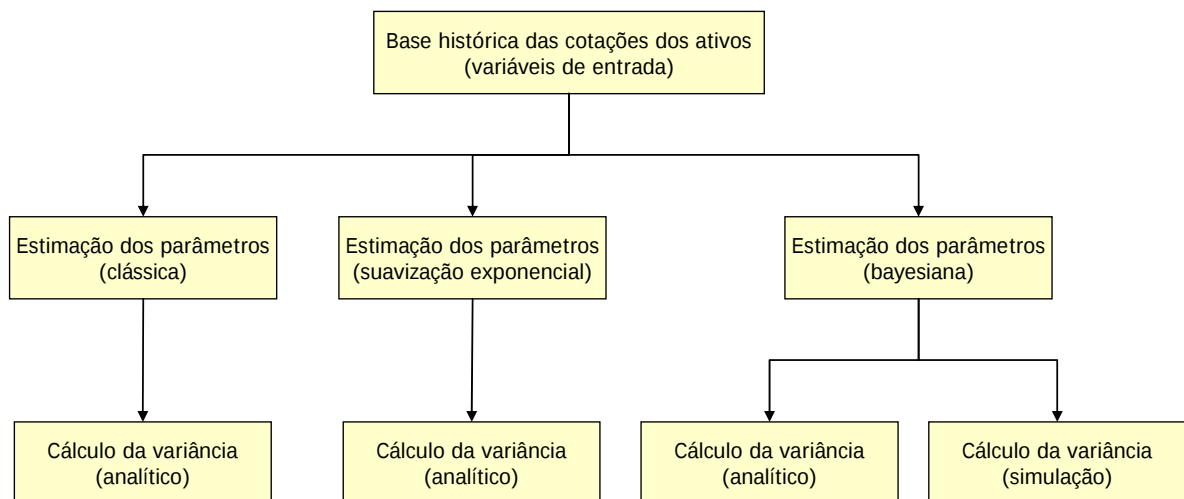


Figura 3.1 - Fluxograma da análise da matriz de covariâncias

O cálculo da variância do portfólio de maneira analítica é dado no capítulo 2, seção 2.4.1, expressão (2.8). Para o cálculo através de simulação, foi utilizado o método de Monte Carlo para a geração de matrizes de covariâncias, distribuídas de acordo com a distribuição de Wishart. Foram geradas 10.000 matrizes de covariâncias, e a partir de cada uma delas, foi gerado um único valor de retorno para os ativos de acordo com uma distribuição normal multivariada de média zero e matriz de covariâncias gerada no passo anterior. Sendo assim, foram gerados 10.000 valores de retornos para cada ativo. Calculou-se a seguir os retornos diários do portfólio. Por fim, calculou-se de maneira analítica a variância destes 10.000 retornos de cada portfólio. Todos os cálculos foram realizados no aplicativo MATLAB, e a rotinas utilizadas estão descritas no apêndice E nos itens E.1, E.2 e E.3.

3.2.2 Resultados

A variância foi estimada pelos três métodos. Para o caso bayesiano, que não fornece apenas um valor único para a estimação do parâmetro, mas sim uma distribuição de probabilidades

para ele, foi utilizada para análise o quantil de ordem 95%, o que significa dizer, que existe 95% de probabilidade do parâmetro estar abaixo deste valor. A tabela 3.6 a seguir ilustra os resultados obtidos para o portfólio composto de maneira igualitária pelos oito ativos definidos na seção 2.6 deste trabalho (12,5% cada), denominado como portfólio 1, por janela de tempo (o histórico fixo de 1.000 observações é variado de 5 em 5 dias; as janelas de tempo analisadas são contempladas no apêndice D).

Tabela 3.6 – Variância por tipo de estimação e janela de tempo para o portfólio 1

Janela de Tempo	Clássico	Suav. Exponencial	Bayesiano (intervalo de 95%)	Bayesiano (simulação)
1	0,000230	0,000312	0,000263	0,001914
2	0,000230	0,000295	0,000263	0,001864
3	0,000230	0,000310	0,000263	0,001835
4	0,000231	0,000327	0,000265	0,001866
5	0,000230	0,000336	0,000263	0,001871
6	0,000231	0,000363	0,000264	0,001873
7	0,000231	0,000360	0,000263	0,001840
8	0,000231	0,000364	0,000264	0,001877
9	0,000231	0,000345	0,000263	0,001846
10	0,000231	0,000370	0,000264	0,001827
11	0,000231	0,000376	0,000263	0,001894
12	0,000230	0,000362	0,000263	0,001855

Pode-se observar que há diferença na variância entre os métodos de estimação clássica e estimação bayesiana (através do intervalo de credibilidade de 95%), ou seja, ao considerar a faixa de 95% de credibilidade da distribuição fornecida pelos estimadores bayesianos da matriz de covariâncias, a variância calculada é em média, aproximadamente, 14% maior que a clássica. O método de suavização exponencial apresentou valores maiores que estes métodos, muito porque, apesar do histórico de 1.000 retornos ser o mesmo, o modelo de suavização exponencial prioriza as informações mais recentes através de seu fator de suavização alfa (α). É importante notar que quando se simula os retornos dos ativos, a variância calculada é superior que a calculada pelos outros métodos. A tabela 3.7 a seguir, representa a média das variâncias nos doze períodos de cálculo para cada tipo de estimação, assim como o comparativo entre eles.

Tabela 3.7 – Comparativo entre as variâncias médias por tipo de estimação para o portfólio 1

	Clássico	Suav. Exponencial	Bayesiano (intervalo de 95%)	Bayesiano (simulação)
VARIÂNCIA MÉDIA	0,000231	0,000343	0,000263	0,001864
% Clássico		+48,9%	+14,2%	+707,8%
% Suav. Exponencial	-32,8%		-23,3%	+442,7%
% Bayesiano (int. de 95%)	-12,4%	+30,4%		+607,5%
% Bayesiano (simulação)	-87,6%	-81,6%	-85,9%	

É importante ressaltar também que o comportamento dos estimadores pouco variou ao decorrer do tempo, principalmente no caso dos estimadores clássicos e bayesianos (intervalo de 95%). Seria necessária a realização de teste de hipóteses para maiores afirmações sobre a estabilidade dos valores da variância, o que não é possível pela dependência que há entre cada uma das janelas de tempo. A figura 3.2 a seguir, ilustra o comportamento de cada um dos tipos de estimação por janela de tempo para o portfólio estudado.

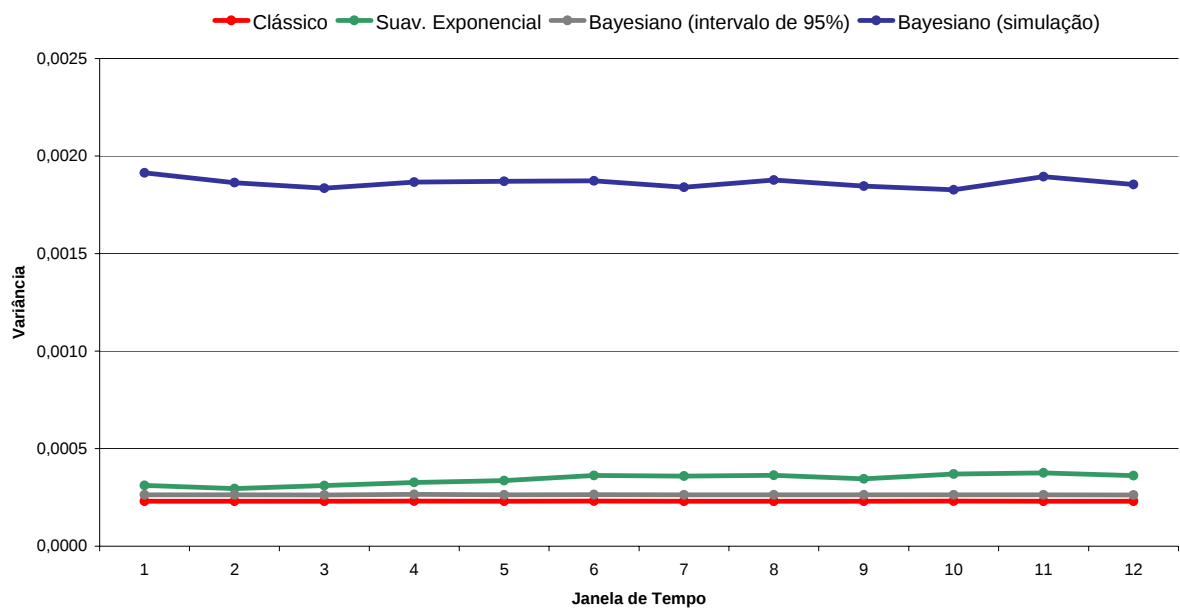


Figura 3.2 - Variância por tipo de estimação e janela de tempo para o portfólio 1

O mesmo comportamento pode ser observado variando-se a composição do portfólio. Serão ilustrados os resultados obtidos para os portfólios 2, 3 e 4, definidos na tabela 3.8 a seguir.

Tabela 3.8 - Composição dos portfólios analisados

	VALE5	CSNA3	PETR4	EMBR4	AMBV4	TNLP4	CMIG4	ITAU4	TOTAL
Portfólio 2	10,0%	15,0%	10,0%	15,0%	10,0%	15,0%	10,0%	15,0%	100,0%
Portfólio 3	20,0%	5,0%	5,0%	20,0%	20,0%	5,0%	5,0%	20,0%	100,0%
Portfólio 4	7,5%	10,0%	12,5%	20,0%	7,5%	20,0%	10,0%	12,5%	100,0%

Portfólio 2

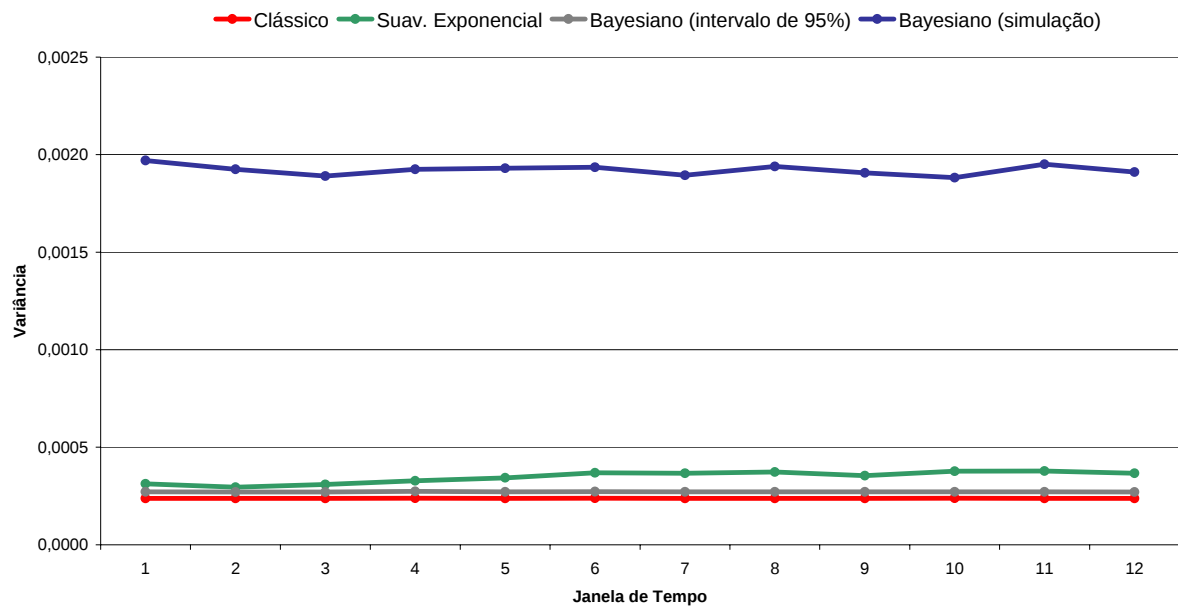


Figura 3.3 - Variância por tipo de estimação e janela de tempo para o portfólio 2

Portfólio 3

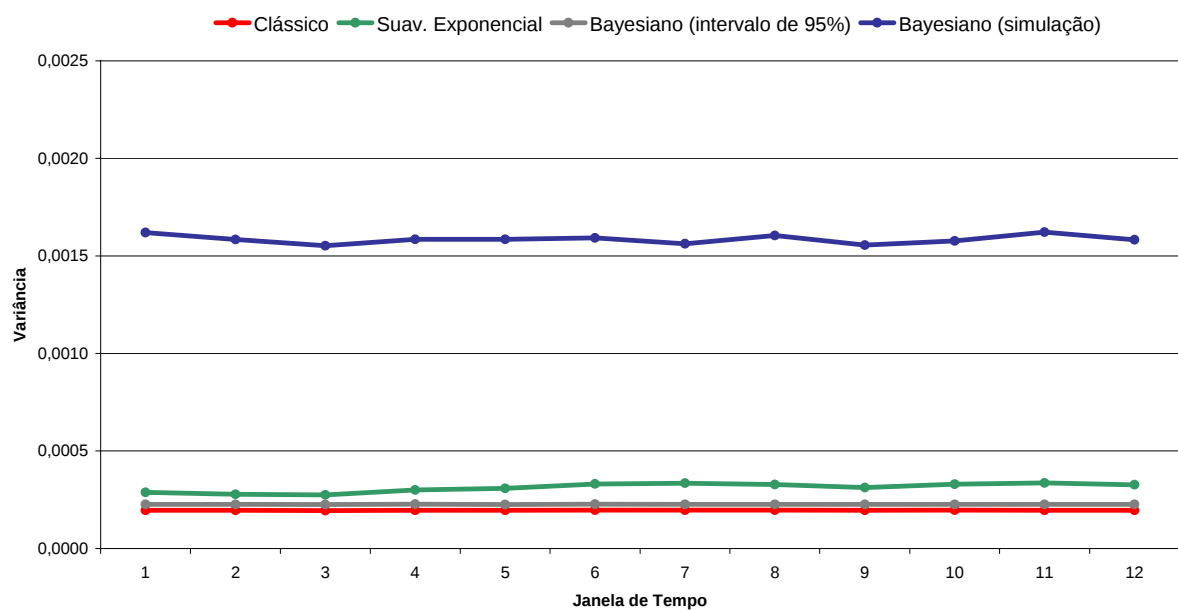


Figura 3.4 - Variância por tipo de estimação e janela de tempo para o portfólio 3

Portfólio 4

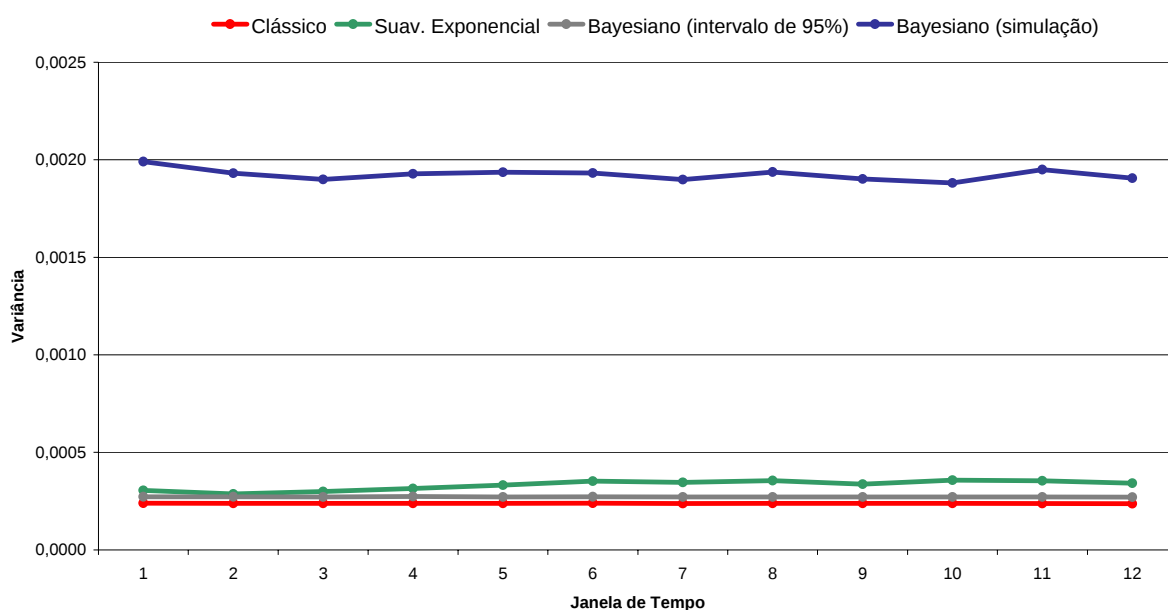


Figura 3.5 - Variância por tipo de estimação e janela de tempo para o portfólio 4

3.3 O valor em risco com incerteza

Motivado por diversos desastres envolvendo derivativos, o valor em risco (VaR) surgiu no final dos anos noventa como alternativa de medida de risco. Em linguagem formal, o VaR pode ser definido como a pior perda esperada ao longo de determinado intervalo de tempo, sob condições normais de mercado e dentro de determinado nível de confiança. Ou seja, o VaR é um quantil da distribuição de probabilidade das perdas, sendo a função de perda dada pelo oposto do retorno do portfólio (JORION, 1997). O VaR é uma medida de risco regulamentada, e ganhou grande popularidade devido ao fato de representar o risco em apenas um número, tornando-se um padrão de mercado.

Conceitualmente, sua obtenção é simples, porém o VaR é um método de mensuração de risco, cuja determinação depende de técnicas estatísticas de estimação, o que introduz incertezas em seu cálculo. O objetivo deste item é avaliar o impacto destas incertezas nos estimadores do VaR, visando avaliar a precisão do VaR paramétrico padrão.

3.3.1 Diferentes formas do cálculo do VaR

O VaR pode ser calculado através de diferentes métodos. O método da série histórica consiste no uso de estatísticas de ordem. O método paramétrico parte da premissa que a distribuição de probabilidade do retorno logarítmico do ativo é normal, totalmente caracterizado pela sua média e variância. Já os métodos que utilizam técnicas computacionais intensivas, como bootstrapping e simulação de Monte Carlo, são baseados em séries históricas e pressupõem que o passado reflete de maneira adequada o que deverá ocorrer no futuro. Será considerada nesta análise que a média da distribuição dos retornos é igual à zero.

3.3.1.1 Método da série histórica

Sendo $R = \{r_1 \dots r_T\}$ um conjunto de observações do retorno de um ativo, um estimador de percentil é dado por $M_{[\alpha T:T]}(R)$, em que $M_{[1:T]}$ é o mínimo de $R = \{r_1 \dots r_T\}$, $M_{[T:T]}$ o máximo, e $M_{[\alpha T:T]}$ o αT -ésimo valor em ordem crescente. Ou seja, segundo o modelo de série histórica, para o cálculo do VaR, é preciso selecionar uma amostra de retornos para o ativo, ordenar esses valores e escolher um valor de acordo com a função $M_{[\alpha T:T]}(R)$, em que α é o nível de confiança desejado (RIBEIRO; FERREIRA, 2005).

3.3.1.2 Método paramétrico

No método paramétrico, assume-se que a variável aleatória R (retorno logarítmico do valor de um ativo) possui uma distribuição de probabilidades $D(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$, onde $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ são parâmetros da distribuição. Os parâmetros da distribuição podem ser estimados através do conjunto de observações $R^* = \{r_1 \dots r_T\}$.

Conhecidos os parâmetros, o quantil de ordem α de uma distribuição contínua é dado por x para o qual

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du = \alpha, \text{ ou} \quad (3.5)$$

$$Q_\alpha(x) = F^{-1}(x) = \inf_x \{x \mid F(x) \geq \alpha\}, \quad (3.6)$$

onde f é a função densidade de probabilidade e F é a função densidade de probabilidade acumulada de D .

Se D for aproximada por uma distribuição normal, os parâmetros a serem estimados são a média μ e a variância σ^2 , e a sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (3.7)$$

Realizando uma mudança de variáveis $z = (x - \mu)/\sigma$, mostra-se que z é uma variável aleatória com média 0 e variância 1 (distribuição normal padrão), e a função densidade de probabilidade é

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}. \quad (3.8)$$

A função densidade de probabilidade acumulada, neste caso, é dada por

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (3.9)$$

O quantil de ordem α é dado por

$$q_\alpha(z) = \Phi^{-1}(\alpha). \quad (3.10)$$

Realizando a mudança de variáveis inversa $x = z\sigma + \mu$, o quantil de ordem α da distribuição de x é

$$Q_{\alpha}(x) = (\Phi^{-1}(\alpha))\sigma + \mu. \quad (3.11)$$

Para o caso onde se está tratando com uma carteira de ativos, pode-se considerar que todos os ativos da carteira possuem distribuição normal. Neste caso, a variância da carteira é dada pela variância da soma de uma série de variáveis aleatórias com distribuição normal e seu valor é dado por $\sigma^2(R(x)) = x^T \Sigma x$.

Como o VaR, ao nível de confiança $1-\alpha$ é definido como $VaR^{1-\alpha}(R) = Q_{\alpha}(R)$ e o retorno de uma carteira constituído por n ativos dado por $R(x) = \sum_{i=1}^n R_i x_i$, pode-se escrever o VaR do portfólio como

$$VaR^{1-\alpha}(R(x)) = \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^T \Sigma x}, \quad (3.12)$$

assumindo que a média dos retornos seja igual a zero, onde o vetor x é a participação percentual de cada ativo na carteira, Σ é a matriz de covariâncias dos ativos e Φ^{-1} é a função densidade de probabilidade inversa da distribuição normal.

3.3.2 Metodologia proposta

Para a avaliação do impacto da incerteza nos estimadores do Valor em Risco, comparamos os seus valores calculados através dos estimadores clássicos, do modelo de suavização exponencial e dos estimadores bayesianos, conforme ilustra a figura 3.6.

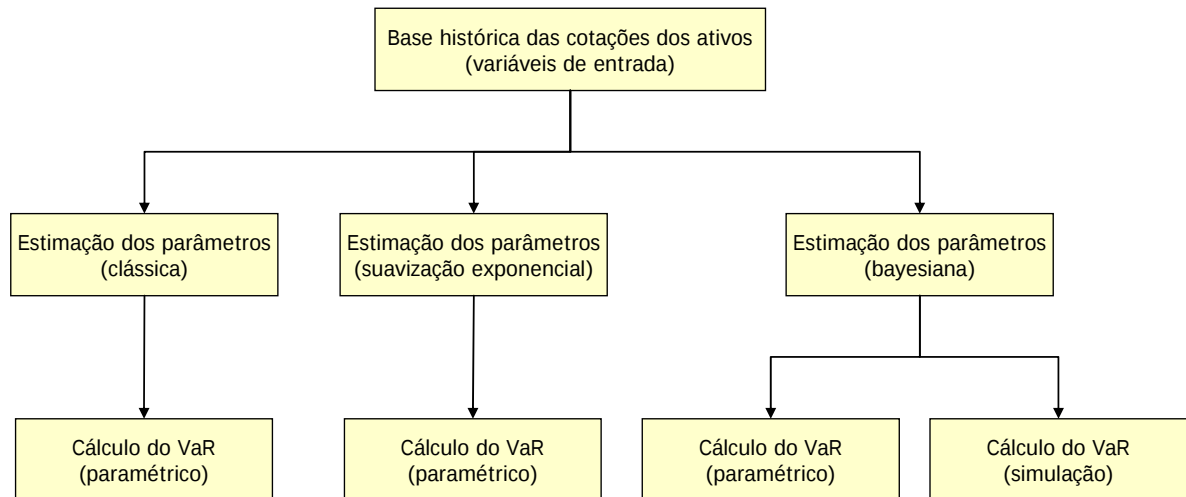


Figura 3.6 – Fluxograma da análise do valor em risco

O cálculo do VaR dos ativos no caso univariado, e do portfólio no caso multivariado, pelo método paramétrico, é realizado através da aplicação da expressão analítica de quantis para a distribuição normal, dada neste capítulo, na seção 3.3.1.2, expressão (3.12). Para os casos bayesianos, foi realizada a simulação através do método de Monte Carlo, onde foram geradas matrizes de covariâncias, distribuídas de acordo com a distribuição de Wishart. Utilizando-se cada matriz de covariância, foi gerado um único valor de retorno para cada ativo de acordo com uma distribuição normal multivariada de média zero e matriz de covariância estimada através da distribuição de Wishart. Foram gerados 10.000 valores de retornos. A seguir, calculou-se os retornos diários do portfólio. Por fim, o VaR foi calculado através do método de série histórica, contemplada neste capítulo, na seção 3.3.1.1, sendo o quantil de ordem 95%, determinado pelo 9.500º valor em ordem decrescente. Todos os cálculos foram realizados com o aplicativo MATLAB e são explicitados no apêndice E, nos itens E.1, E.2 e E.3.

3.3.3 Resultados

3.3.3.1 *Análise individual de cada ativo*

Inicialmente foi estudado o período de 2 de janeiro de 2002 até 3 de janeiro de 2006. O desvio-padrão de cada ativo foi estimado pelos três métodos. No caso bayesiano, foi utilizada

para análise a média e o quantil de ordem 95%, o que significa dizer, que existe 95% de probabilidade do parâmetro estar abaixo deste valor. Nesta análise univariada, não foi utilizada a abordagem de simulação. A tabela 3.9 abaixo resume os dados obtidos:

Tabela 3.9 - Desvio-padrão de cada ativo por tipo de estimação

Ativo	Clássico	Suav. Expon.	Bayesiano	
			média	95,0%
VALE5	0,019906	0,017294	0,020164	0,020909
CSNA3	0,027991	0,020771	0,028183	0,029234
PETR4	0,020139	0,019170	0,020396	0,021161
EMBR4	0,023986	0,017783	0,024210	0,025106
AMBV4	0,018739	0,013311	0,019013	0,019718
TNLP4	0,022120	0,013829	0,022356	0,023188
CMIG4	0,027707	0,021415	0,027902	0,028938
ITAU4	0,021512	0,018701	0,021758	0,022563

Calculou-se, a seguir, o Valor em Risco a um nível de confiança de 95% pelo método paramétrico. Vale ressaltar que o valor utilizado para $\Phi^{-1}(0,95)$ foi de -1,645. A tabela 3.10 abaixo, demonstra os resultados obtidos:

Tabela 3.10 - Valor em Risco (VaR) de cada ativo por tipo de estimação

Ativo	Clássico	Suav. Expon.	Bayesiano	
			média	95,0%
VALE5	3,2745%	2,8448%	3,3170%	3,4396%
CSNA3	4,6046%	3,4169%	4,6362%	4,8089%
PETR4	3,3129%	3,1534%	3,3552%	3,4810%
EMBR4	3,9458%	2,9254%	3,9825%	4,1299%
AMBV4	3,0825%	2,1896%	3,1277%	3,2436%
TNLP4	3,6387%	2,2749%	3,6776%	3,8145%
CMIG4	4,5577%	3,5228%	4,5898%	4,7603%
ITAU4	3,5388%	3,0763%	3,5792%	3,7117%

Ao compararmos os valores encontrados através das diferentes formas de estimação dos parâmetros, podemos perceber que o VaR calculado através da estimação bayesiana (média) possui um valor muito próximo do VaR calculado através da estimação clássica. Mas, uma vez que levamos em consideração o intervalo definido pela estimação bayesiana para os parâmetros, verificamos que o VaR clássico pode estar subestimado em até aproximadamente 5%. Já o VaR calculado pelos estimadores do modelo de suavização exponencial pode estar subestimado de 10% a 40% aproximadamente. Estas diferenças são contempladas a seguir.

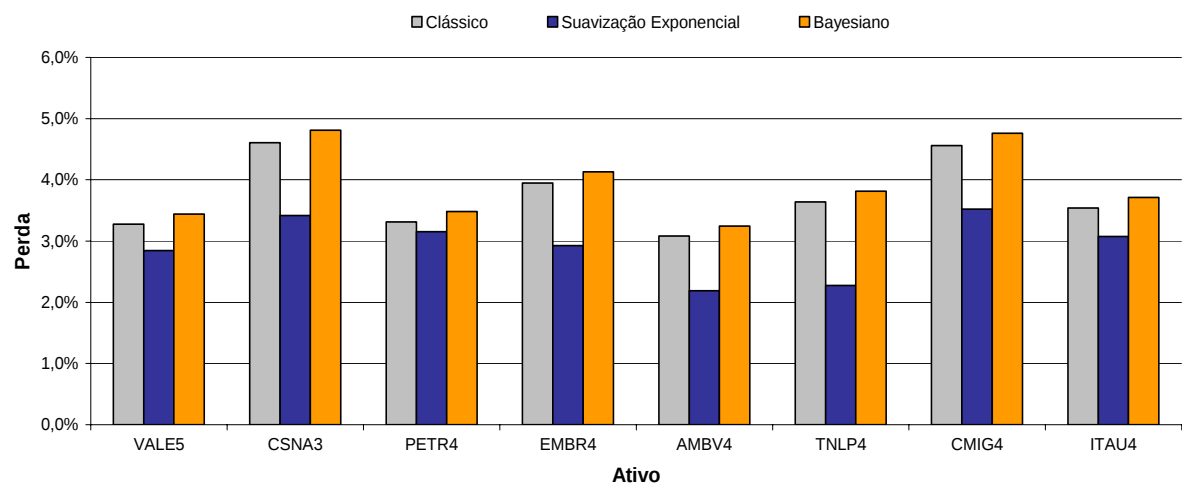


Figura 3.7 - VaR calculado por tipo de estimação e ativo

Tabela 3.11 - Comparativo do VaR calculado por tipo de estimação e ativo

Ativo	Clássico / Bayesiano (95%)	Suav. Expon. / Bayesiano (95%)
VALE5	-4,8%	-17,3%
CSNA3	-4,2%	-28,9%
PETR4	-4,8%	-9,4%
EMBR4	-4,5%	-29,2%
AMBV4	-5,0%	-32,5%
TNLP4	-4,6%	-40,4%
CMIG4	-4,3%	-26,0%
ITAU4	-4,7%	-17,1%

3.3.3.2 Análise do portfólio

Será analisado neste item, o valor em risco calculado através das diferentes formas de estimação dos parâmetros, para o portfólio como um todo. No caso bayesiano, foi utilizado para análise o quantil de ordem 95%, buscando identificar os maiores valores que a variância do portfólio possa assumir. A tabela 3.12 a seguir apresenta os valores em risco calculados para o portfólio 1 definido no item anterior (todos ativos com a mesma participação), por janela de tempo (o histórico fixo de 1.000 observações é variado de 5 em 5 dias; as janelas de tempo analisadas são contempladas no apêndice D).

Tabela 3.12 – Valor em Risco (95%) por tipo de estimação e janela de tempo para o portfólio 1

Janela de Tempo	Clássico	Suav. Exponencial	Bayesiano (intervalo de 95%)	Bayesiano (simulação)
1	-2,50%	-2,90%	-2,67%	-7,27%
2	-2,50%	-2,82%	-2,67%	-6,94%
3	-2,49%	-2,90%	-2,67%	-7,06%
4	-2,50%	-2,98%	-2,68%	-7,19%
5	-2,50%	-3,02%	-2,67%	-7,26%
6	-2,50%	-3,13%	-2,67%	-6,95%
7	-2,50%	-3,12%	-2,67%	-7,05%
8	-2,50%	-3,14%	-2,67%	-7,19%
9	-2,50%	-3,06%	-2,67%	-6,99%
10	-2,50%	-3,16%	-2,67%	-7,13%
11	-2,50%	-3,19%	-2,67%	-7,32%
12	-2,50%	-3,13%	-2,67%	-7,09%

De maneira similar aos resultados obtidos com a variância, há diferença entre os métodos de estimação clássica e bayesiana, com o VaR calculado pelos estimadores clássicos podendo estar subestimado em até aproximadamente 6% quando comparado com o VaR calculado através do intervalo de 95% de credibilidade fornecido pelos estimadores bayesianos. O valor em risco calculado através de suavização exponencial apresentou perdas maiores que pelo método clássico e bayesiano, o que se deve a priorização das informações mais recentes pelo modelo. Vale ressaltar que o VaR calculado a partir de simulação é mais conservador, sendo quase que três vezes maior que o VaR clássico. A tabela 3.13 abaixo representa a média dos VaR's nos doze períodos para cada tipo de estimação, assim como o comparativo entre elas.

Tabela 3.13 – Comparativo entre os Valores em Risco (95%) médios por tipo de estimação para o portfólio 1

	Clássico	Suav. Exponencial	Bayesiano (intervalo de 95%)	Bayesiano (simulação)
VaR MÉDIO	2,50%	3,05%	2,67%	7,12%
% Clássico		+21,9%	+6,9%	+184,9%
% Suav. Exponencial	-18,0%		-12,4%	+133,7%
% Bayesiano (int. de 95%)	-6,4%	+14,1%		+166,7%
% Bayesiano (simulação)	-64,9%	-57,2%	-62,5%	

Também de forma similar ao comportamento da variância, o valor em risco pouco variou ao decorrer do tempo, principalmente no caso dos estimadores clássicos e bayesianos (intervalo de 95%). Este comportamento é ilustrado na figura 3.8 a seguir, que indica o VaR (alfa=95%) calculado por cada um dos métodos por janela de tempo para o portfólio 1.

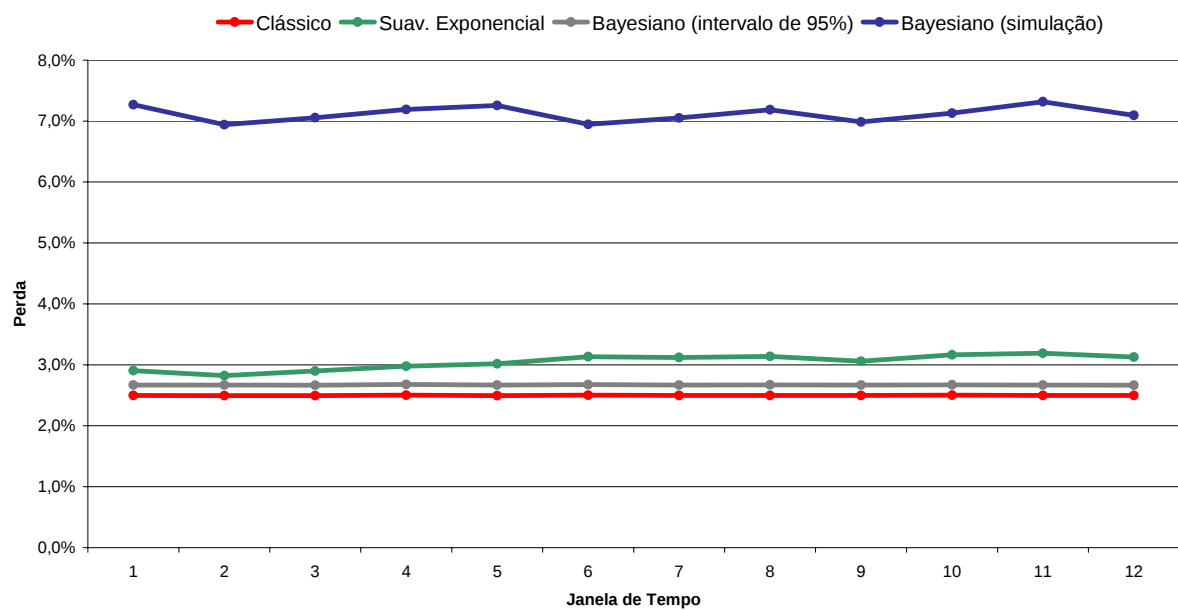


Figura 3.8 – Valor em Risco (95%) por tipo de estimação e janela de tempo para o portfólio 1

Assim como no caso da variância, o mesmo comportamento pode ser observado variando-se a composição do portfólio. A seguir serão ilustrados os resultados obtidos para os portfólios 2, 3 e 4, definidos no item anterior.

Portfólio 2

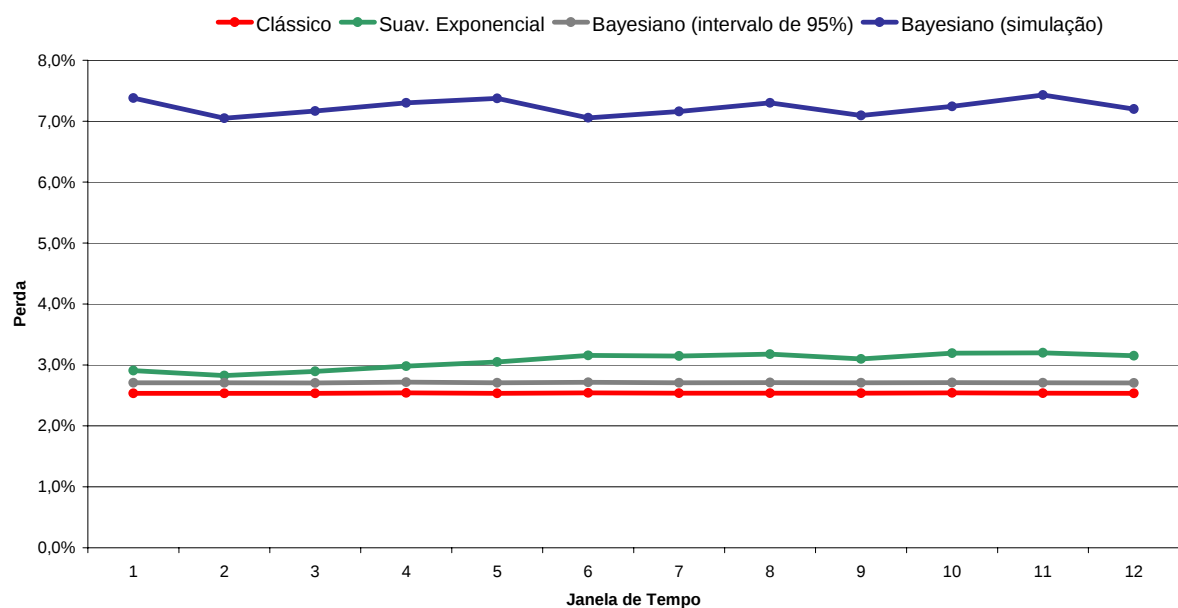


Figura 3.9 – Valor em Risco (95%) por tipo de estimação e janela de tempo para o portfólio 2

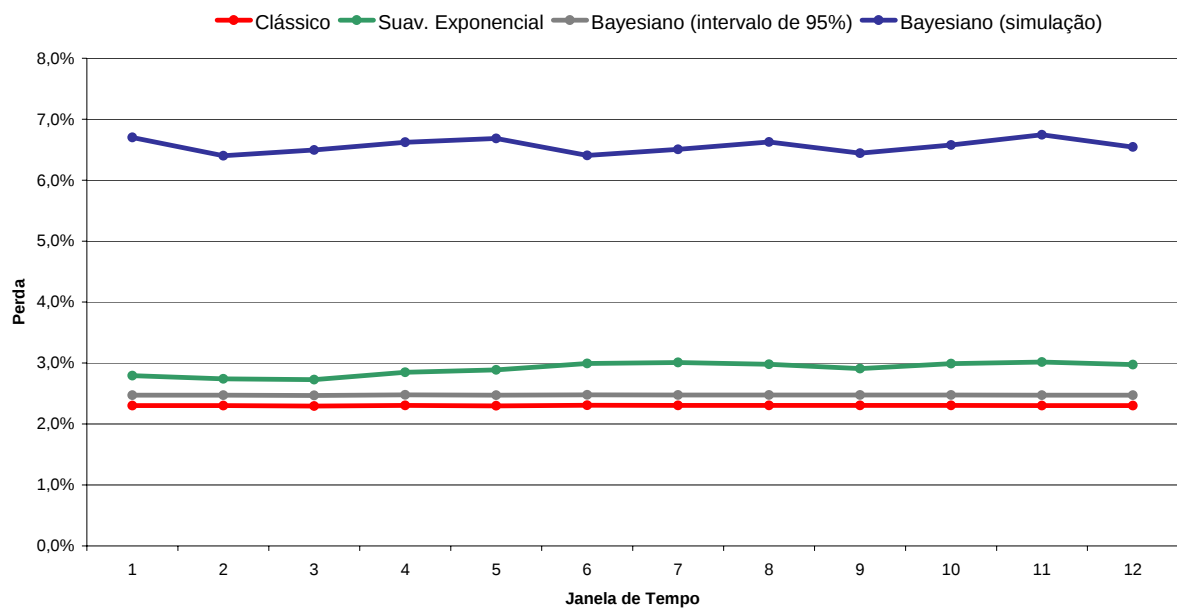
Portfólio 3

Figura 3.10 – Valor em Risco (95%) por tipo de estimação e janela de tempo para o portfólio 3

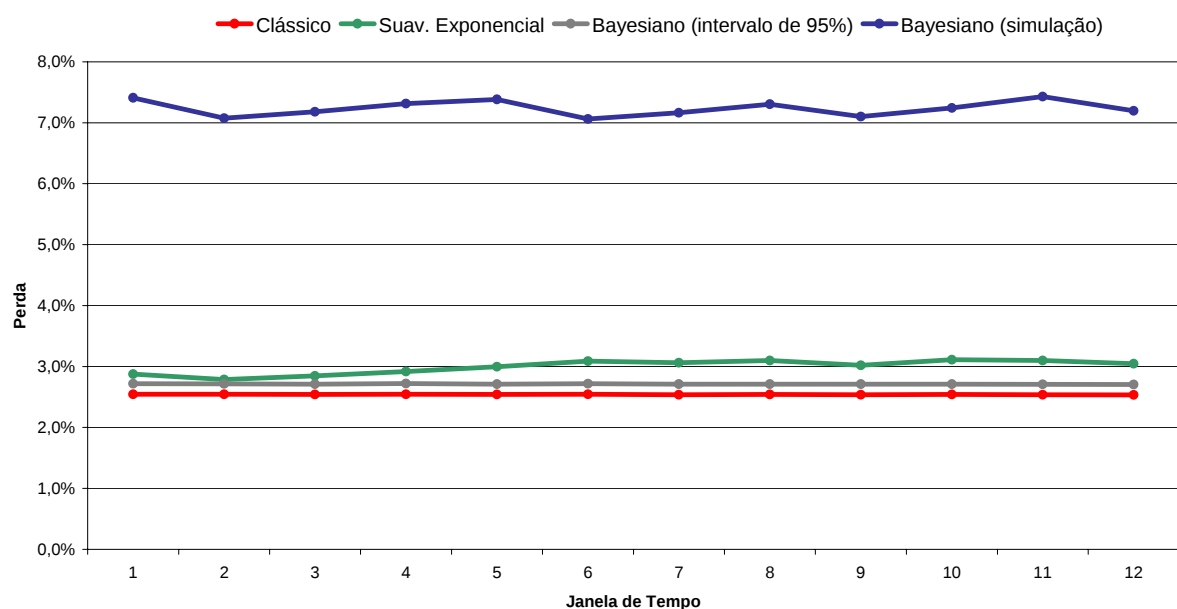
Portfólio 4

Figura 3.11 – Valor em Risco (95%) por tipo de estimação e janela de tempo para o portfólio 4

3.4 Conclusões preliminares

Modelos de tomada de decisão são bastante sensíveis aos seus parâmetros de entrada. Ao estudar o problema de composição de portfólio de mínimo risco é necessário mensurar o risco e, portanto, definir parâmetros. Pode-se concluir que a matriz de covariâncias, base do cálculo da variância de um portfólio, como qualquer parâmetro, possui incerteza. Deve-se então, avaliar o impacto desta incerteza nos modelos em que ela é utilizada como medida de risco.

O valor em risco, embora bastante difundido e utilizado para aferição de risco, tem sofrido diversas críticas quanto a sua eficácia, principalmente nos casos em que o comportamento do retorno não segue uma distribuição normal. Isto porque nenhuma informação a respeito da cauda da distribuição é fornecida, podendo acarretar em perdas extremas, ou perdas não esperadas (URYASEV; PALMOUIST; KROKHMAL, 2001).

Este trabalho questiona não o comportamento dos retornos, mas sim, em como estes retornos são traduzidos em parâmetros de um modelo de análise. A incerteza pode causar grande impacto financeiro nas empresas, e como pudemos avaliar neste capítulo, este impacto depende muito da metodologia empregada.

Através de inferência bayesiana, pouco discutida na literatura até o momento, se chega a distribuições de probabilidade para os parâmetros. Foi constatado que o VaR calculado através dos estimadores clássicos, pode estar subestimado em até aproximadamente 6% quando comparado com o VaR calculado através do intervalo de 95% de credibilidade fornecido pelos estimadores bayesianos. Já o VaR calculado pelo método de simulação, muito utilizado em modelos multiperíodo, pode ser até 3 vezes maior que o VaR calculado pelos estimadores clássicos para o portfólio como um todo.

4

PORTFÓLIOS COM INCERTEZA

O natural neste instante, após a constatação da possibilidade de sub-valorização do valor em risco (VaR) pelos métodos tradicionais no capítulo anterior, seria estudar o problema de composição de portfólios de mínimo Valor em Risco. Porém, do ponto de vista de modelo de otimização, no caso do VaR, recai-se em problemas matematicamente complexos, nos quais a função objetivo não é convexa (URYASEV; PALMOUIST; KROKHMAL, 2001); (TOPALOGLOU; VLADIMIROU; ZENIOS, 2002); (SZEGÖ, 2002). A menos do caso em que o VaR é estimado a partir do pressuposto de normalidade da distribuição de probabilidade dos retornos, que recai num problema facilmente resolvido por técnicas de otimização quadrática (LUENBERGER, 1998), não há uma expressão analítica trivial que possibilite escrever o $VaR_{\alpha}(x)$. Ao utilizar estimadores para aproximação da função objetivo, o problema passa a ter diversos mínimos locais, o que dificulta, e até mesmo inviabiliza a otimização segundo os métodos de otimização tradicionais (RIBEIRO; FERREIRA, 2005).

As técnicas de otimização utilizadas para alocação de portfólio que utilizam medidas de risco baseadas nos percentis da distribuição de perdas empregam técnicas de otimização global que não serão abordadas neste trabalho. Dada esta dificuldade do uso do VaR na determinação de portfólios ótimos, este capítulo irá abordar a incerteza nos parâmetros na composição de um portfólio clássico, baseado no critério de média-variância.

Quando se procura compor um portfólio, uma característica desejável e importante é a sua estabilidade, ou seja, espera-se que não seja necessário realizar muitas alterações na sua composição ao longo do tempo, devido aos altos custos de reestruturação e necessidade de liquidez. Ou, de uma outra maneira, que o erro de estimação dos parâmetros não acarrete grandes diferenças de composição do portfólio para um mesmo período. O objetivo global da composição de portfólio é encontrar uma composição ótima, cuja incerteza dos parâmetros não interfira na estabilidade ou robustez da solução ao longo do tempo.

Sabe-se que o modelo de média-variância depende das estimativas do valor esperado dos retornos dos ativos (média) e de sua matriz de covariâncias. No mundo real, entretanto, não se

sabe o valor exato da média e da variância. Um portfólio composto através do modelo de Markowitz pode ser muito sensível a erros de estimação dos seus parâmetros de entrada. Em particular, concluiu-se que erros na estimação da média são mais maléficos ao resultado final que erros em outros parâmetros (BEST; GRAUER,1991); (CHOPRA; HENSEL; TURNER, 1992); (CHOPRA; ZIEMBA,1998).

Nesta linha, Deng, Li e Wang (2005) propuseram estudar o problema de composição de portfólio através de um intervalo estimado para os retornos de cada ativo, enquanto que a matriz de covariâncias seria determinada e fixa. Vale ressaltar, que não há ainda na literatura modelos que consigam utilizar incerteza na matriz de covariâncias para o cálculo de composição ótima de um portfólio. O modelo de Deng, Li e Wang (2005) é um modelo minimax definido através da maximização de uma função objetivo, dada pelo critério média-variância, do pior (mínimo) possível valor esperado dos retornos dos ativos que compõem o portfólio.

Neste capítulo estudaremos o comportamento do modelo minimax proposto por Deng, Li e Wang, e para compor os intervalos dos retornos de cada ativo, utilizaremos a inferência bayesiana para a estimação, que retornará um intervalo de credibilidade onde a média dos retornos de cada ativo deve estar.

Portanto, uma vez considerado que o real valor dos parâmetros é desconhecido, que há erros em estimações, o objetivo deste capítulo é avaliar uma proposta de modelo de composição de portfólio que utilize incerteza. O foco é avaliar sua robustez ao longo do tempo e o desempenho do portfólio resultado do modelo.

Inicialmente, será apresentado o modelo de Markowitz para o problema de composição de portfólio de mínimo risco, e uma avaliação do impacto da incerteza na matriz de covariâncias em sua solução. Posteriormente, será apresentado o modelo minimax, assim como sua estratégia de otimização e os resultados e análises do modelo.

4.1 Modelo de Markowitz

O modelo de Markowitz admite que o retorno do portfólio é uma variável aleatória contínua com distribuição normal e pretende encontrar um portfólio com mínimo risco, sendo este risco mensurado através da variância do retorno do portfólio.

O retorno esperado do portfólio $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, é dado por:

$$E[R(x)] = \sum_{i=1}^{n+1} r_i x_i, \quad (4.1)$$

e a variância do retorno do portfólio é dada por:

$$Var[R(x)] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j = x^T \Sigma x \quad (4.2)$$

Formalmente, dados n ativos com taxas esperadas de retorno $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$ e covariâncias σ_{ij} para $i, j = 1, 2, \dots, n$, e R_0 , o retorno esperado do portfólio, pretende-se determinar a solução do problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{x}{Min} \quad f(x) = x^T \Sigma x \\ \text{Sujeito a:} \\ \quad \sum_{i=1}^n \bar{r}_i x_i \geq R_0 \\ \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

4.1.1 Avaliação do impacto da incerteza na matriz de covariâncias

No modelo de Markowitz (1952), o que se quer é minimizar a variância do portfólio dado um nível de retorno esperado. No capítulo anterior foram discutidas diferentes formas de estimação dos parâmetros, entre elas, a estimação bayesiana que forneceu um intervalo de credibilidade para a matriz de covariâncias (seção 3.1.3). A partir deste intervalo foi implementado o modelo de Markowitz para três instantes da distribuição de probabilidades da matriz de covariâncias calculados também na seção 3.1.3: o intervalo de 5% de credibilidade, a média, e o intervalo de 95% de credibilidade. Todos os cálculos foram realizados com o aplicativo MATLAB e as rotinas utilizadas estão explicitadas no apêndice E, no item E.4.1. O resultado é expresso na figura 4.1 abaixo, que ilustra a fronteira eficiente, solução do modelo para cada um dos casos.

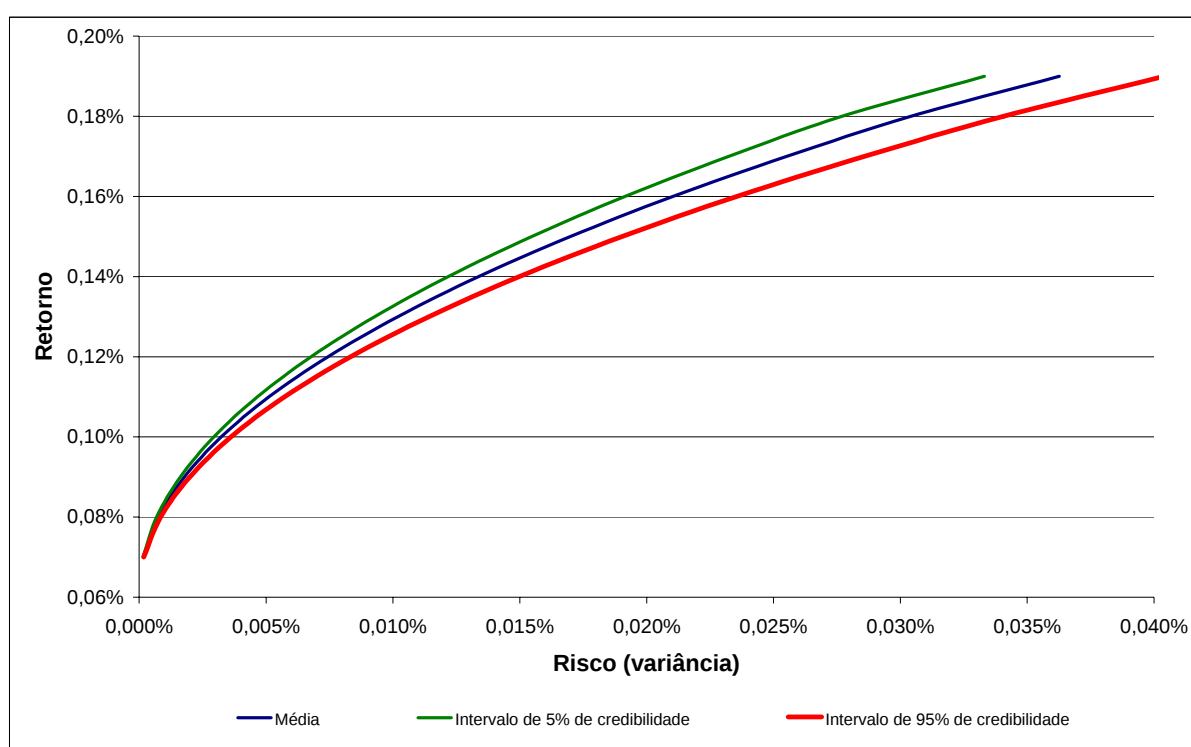


Figura 4.1 - Fronteira eficiente para o modelo de Markowitz

Pode-se notar que quanto maior o intervalo de credibilidade para a matriz de covariâncias, maior a variância do portfólio dado um retorno objetivo. É importante destacar que estas diferenças na fronteira eficiente não impactam a composição do portfólio solução do problema, conforme pode ser observado nas figuras 4.2, 4.3 e 4.4, a seguir.

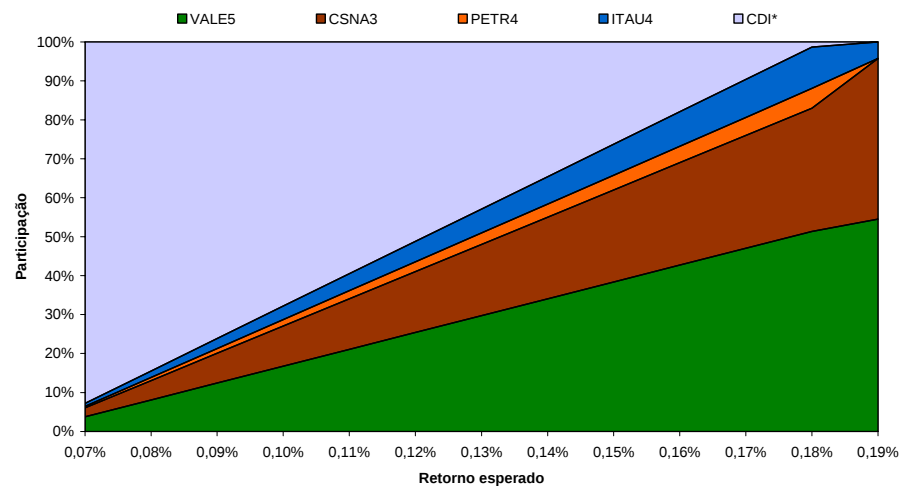


Figura 4.2 – Part. de cada ativo no portfólio solução por retorno esperado (média da matriz de covariâncias)

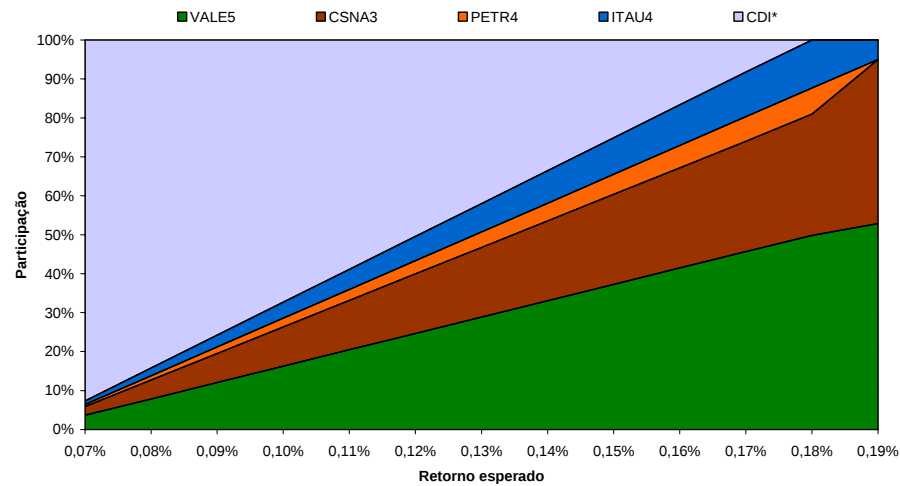


Figura 4.3 - Part. de cada ativo no portfólio solução por retorno esperado (int. de 5% da matriz de covariâncias)

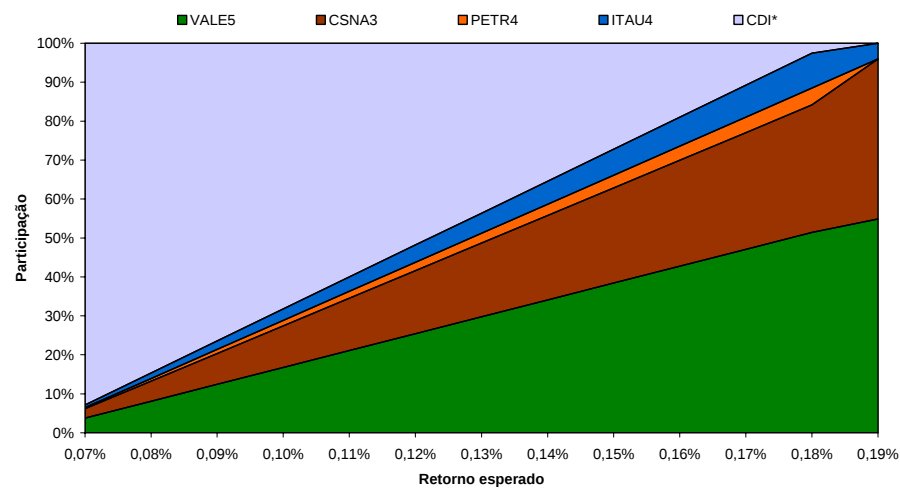


Figura 4.4 - Part. de cada ativo no portfólio solução por retorno esperado (int. de 95% da matriz de covariâncias)

Deste modo, a premissa de que a matriz de covariâncias é fixada no modelo minimax, proposto por Deng, Li e Wang (2005), não deve causar grandes interferências na solução dada pelo modelo.

4.2 Modelo minimax

O modelo minimax de Deng, Li e Wang (2005) admite que no mercado estão disponíveis n ativos que oferecem retornos variáveis e com certo nível de risco, e um ativo sem risco que oferece uma taxa de retorno fixa. O investidor deve alocar sua riqueza, através destes n ativos com risco e do ativo sem risco. É considerado também que taxas e custos de transações são desprezados, e que todos os ativos são infinitamente divisíveis e não há limitação de quantidade de venda ou compra de ações.

As seguintes notações serão utilizadas:

$\tilde{r}_i$: retorno logarítmico do ativo i ($i=1,2,\dots,n$);

r_i : valor esperado de $\tilde{r}_i$ ($i=1,2,\dots,n$);

r_{n+1} : retorno logarítmico do ativo sem risco, que é uma constante;

σ_{ij} : $\text{cov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_j)$, covariância entre $\tilde{r}_i$ e $\tilde{r}_j$, ($i,j=1,2,\dots,n$);

x_i : participação de cada ativo i no portfólio total ($i=1,2,\dots,n+1$).

São dados fixos do problema, todos σ_{ij} , ou seja, a matriz de covariância entre os ativos com risco, e o valor de r_{n+1} . Cada r_i ($i=1,2,\dots,n$) é definido dentro do intervalo:

$$r_i \geq r_{n+1} \quad (4.3)$$

$$a_i \leq r_i \leq b_i \quad (4.4)$$

onde $0 \leq a_i \leq b_i$ são constantes. Os valores de a (limite inferior) e de b (limite superior) são definidos através de inferência bayesiana para estimação do intervalo de credibilidade da

média dos retornos de cada ativo. A condição (4.1) indica que o valor esperado do retorno de cada ativo não pode ser menor que o retorno do ativo sem risco. Isto o que é natural, pois se o retorno do ativo sem risco fosse maior, o investidor incorporaria este ativo ao seu portfólio, ao invés de incorporar o risco de um ativo que possui um retorno menor. A razão da existência da condição (4.2) se deve ao fato de que os valores esperados dos retornos dos ativos não podem ser exatamente estimados e de que o modelo de média-variância proposto por Markowitz ser muito sensível a erros de estimação na média dos retornos.

O modelo assume que a matriz de covariâncias $\Sigma = (\sigma_{ij})_{n \times n}$ é positiva definida.

O retorno esperado do portfólio $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$, onde $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1$, é dado por:

$$E[R(x)] = \sum_{i=1}^{n+1} r_i x_i, \quad (4.5)$$

e a variância do retorno do portfólio é dada por:

$$\text{Var}[R(x)] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j = x^T \Sigma x \quad (4.6)$$

Um investidor racional deve atentar não somente em maximizar o valor esperado, mas também em minimizar a variância (considerada como medida de risco no modelo) do retorno de seu portfólio. Deste modo, o investidor deve balancear sua decisão entre estes dois objetivos. Dado $1-w$ e w , pesos associados aos critérios $E[R(x)]$ e $\text{Var}[R(x)]$, respectivamente. Então o investidor atenta a maximizar:

$$f(x, r) = (1-w) \sum_{i=1}^{n+1} r_i x_i - w \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \quad (4.7)$$

Aqui, o parâmetro w pode ser interpretado como o fator de aversão ao risco do investidor. Quanto maior o valor de w , maior a aversão ao risco do investidor. Quando $w=1$, o investidor será extremamente conservador, pois neste caso, será considerado apenas o risco do investimento, não importando o seu retorno. Já quando $w=0$, significa que o investidor é

extremamente agressivo, e busca maiores retornos não importando o risco. O modelo considerará que o investidor possui aversão ao risco, isto é, $0 < w \leq 1$.

Por outro lado, devido ao fato de que os valores dos r_i 's não são exatos, o investidor deve procurar por uma estratégia que lhe forneça o melhor do pior caso. Faz sentido então, que se busque maximizar a função (4.5) através do pior caso possível dos valores esperados para os retornos de cada ativo. Como consequência, é definido o problema de minimax a ser resolvido:

$$(P1) \left\{ \begin{array}{l} \underset{x}{\text{Max}} \underset{r}{\text{Min}} \quad f(x, r) = (1-w) \sum_{i=1}^{n+1} r_i x_i - w \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j, \\ \text{Sujeito a:} \\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1, \\ r_i \geq r_{n+1}, i = 1, \dots, n, \\ a_i \leq r_i \leq b_i, i = 1, \dots, n, \end{array} \right.$$

com o parâmetro w variando entre $(0,1]$.

Determinando $X = \left\{ x : \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \right\}$ e $R = \{ r : r_i \geq r_{n+1}, a_i \leq r_i \leq b_i, i = 1, \dots, n \}$, o problema de maxmin acima, pode ser escrito na forma padrão de um problema de minimax da seguinte maneira:

$$(P1) \max_{x \in X} \min_{r \in R} f(x, r).$$

4.2.1 Estratégia de otimização

No problema (P1) pode-se considerar que R é compacto e f é contínua e convexa em R . Pode-se considerar também que f é côncava em X . Sendo assim, segundo Fan (1953), o problema

(P1) possui as propriedades adequadas, e portanto, pode ser resolvido de maneira equivalente através do seguinte problema de minimax:

$$(P1) \max_{x \in X} \min_{r \in R} f(x, r) = (P1)' \min_{r \in R} \max_{x \in X} f(x, r).$$

Para resolver o problema (P1)', primeiro consideraremos o problema $\max_{x \in X} f(x, r)$, dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max}_x \quad (1-w) \sum_{i=1}^{n+1} r_i x_i - w \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j, \\ \text{Sujeito a:} \\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1. \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Considerando $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, o problema acima com restrição pode ser formulado da seguinte maneira sem restrição:

$$\text{Max}_x \quad (1-w)r_{n+1} + (1-w)(r - 1r_{n+1})^T x - wx^T \Sigma x, \quad (4.9)$$

onde $1r_{n+1}$ é um vetor de tamanho n , dado por $(r_{n+1}, r_{n+1}, \dots, r_{n+1})_{n \times 1}$.

Devido a matriz de covariâncias (Σ) ser positiva definida, a função objetivo é estritamente convexa, e portanto, possui uma única solução ótima (DENG; LI; WANG, 2005). Através de métodos de cálculo diferencial e após algum tratamento analítico, obtém-se que a solução ótima do problema (4.7) é:

$$x = \frac{1-w}{2w} \Sigma^{-1} (r - 1r_{n+1}), \quad (4.10)$$

e o máximo de (4.7) é:

$$(1-w)r_{n+1} + \frac{(1-w)^2}{4w} (r - 1r_{n+1})^T \Sigma^{-1} (r - 1r_{n+1}). \quad (4.11)$$

Considerando a equação (4.9), o problema de maxmin (P1), pode ser resolvido através do seguinte problema:

$$(P) \begin{cases} \underset{r}{Min} & (r - 1r_{n+1})^T \Sigma^{-1} (r - 1r_{n+1}) , \\ \text{Sujeito a:} & \\ & r_i \geq r_{n+1}, i = 1, \dots, n, \\ & a_i \leq r_i \leq b_i, i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

O problema (P) tem uma única solução ótima, denotada por $r^* = (r_1^*, r_2^*, \dots, r_n^*)^T$ (DENG; LI; WANG, 2005).

Sendo assim, de acordo com a equação (4.8) e com a solução ótima do problema (P), a solução ótima para o problema de minimax proposto (P1) é:

$$x = \frac{1-w}{2w} \Sigma^{-1} (r^* - 1r_{n+1}) , \quad (4.12)$$

$$x_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^n x_i , \quad (4.13)$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

E, considerando as expressões (4.3) e (4.4), o valor esperado e a variância associada ao retorno do portfólio, são, respectivamente:

$$e(w) = r_{n+1} + \frac{(1-w)}{2w} (r^* - 1r_{n+1})^T \Sigma^{-1} (r^* - 1r_{n+1}) \quad (4.14)$$

$$\sigma^2(w) = \frac{(1-w)^2}{4w} (r^* - 1r_{n+1})^T \Sigma^{-1} (r^* - 1r_{n+1}) \quad (4.15)$$

4.3 Resolução

Foram selecionadas oito ações para a composição do portfólio estudado, determinadas no capítulo 2, item 2.6 deste trabalho. Considerou-se uma série de taxas de retornos logarítmicos de ações de aproximadamente 4 anos (2 de janeiro de 2002 até 3 de janeiro de 2006), que forneceram 1.000 observações diárias. Todos os cálculos foram realizados com o aplicativo MATLAB e as rotinas utilizadas estão explicitadas no apêndice E, no item E.5.

4.3.1 Entrada de Dados

Para a otimização da composição do portfólio através do modelo minimax é preciso estimar os parâmetros valor esperado e matriz de covariâncias dos retornos logarítmicos de cada ativo. Para tanto, foi utilizada a inferência Bayesiana, através do programa WinBugs®, que realiza a análise de modelos estatísticos através do método de Monte Carlo de cadeias de Markov (MCMC – Markov Chain Monte Carlo) e fornece informações sobre os parâmetros desses modelos. O modelo utilizado para a estimação dos parâmetros através do programa WinBugs® é explicitado no apêndice C, assim como suas entradas e saídas.

A tabela 4.1 a seguir, representa o valor esperado da matriz de covariâncias, calculadas pelos estimadores bayesianos.

Tabela 4.1 - Matriz de covariâncias estimada pelos estimadores bayesianos

	VALE5	CSNA3	PETR4	EMBR4	AMBV4	TNLP4	CMIG4	ITAU4
VALE5	0,000407	0,000218	0,000145	0,000112	0,000085	0,000121	0,000124	0,000100
CSNA3	0,000218	0,000794	0,000244	0,000160	0,000164	0,000306	0,000319	0,000236
PETR4	0,000145	0,000244	0,000416	0,000125	0,000137	0,000256	0,000279	0,000215
EMBR4	0,000112	0,000160	0,000125	0,000586	0,000101	0,000150	0,000143	0,000102
AMBV4	0,000085	0,000164	0,000137	0,000101	0,000362	0,000154	0,000177	0,000162
TNLP4	0,000121	0,000306	0,000256	0,000150	0,000154	0,000500	0,000364	0,000256
CMIG4	0,000124	0,000319	0,000279	0,000143	0,000177	0,000364	0,000779	0,000312
ITAU4	0,000100	0,000236	0,000215	0,000102	0,000162	0,000256	0,000312	0,000473

Como citado na seção 4.2, consideraremos o valor da matriz de covariância como fixo. Já o valor da média dos retornos será considerado um intervalo de credibilidade onde se espera

que encontre o parâmetro. A tabela 4.2 abaixo ilustra o resultado da estimação bayesiana para os retornos de cada ativo, assim como os valores para cada intervalo de credibilidade.

Tabela 4.2 - Valor esperado do retorno por ativo e intervalo de credibilidade

	MÉDIA	Intervalos de credibilidade da distribuição dos retornos							
		2,5%	5,0%	10,0%	25,0%	75,0%	90,0%	95,0%	97,5%
VALE5	0,1745 %	0,0506%	0,0707%	0,0932%	0,1314%	0,2176%	0,2556%	0,2787%	0,2988%
CSNA3	0,2156 %	0,0416%	0,0695%	0,1029%	0,1559%	0,2754%	0,3292%	0,3623%	0,3910%
PETR4	0,1368 %	0,0109%	0,0306%	0,0542%	0,0933%	0,1800%	0,2192%	0,2428%	0,2633%
EMBR4	0,0805 %	-0,0689%	-0,0460%	-0,0184%	0,0282%	0,1326%	0,1785%	0,2074%	0,2309%
AMBV4	0,0932 %	-0,0240%	-0,0053%	0,0166%	0,0531%	0,1334%	0,1699%	0,1923%	0,2110%
TNLP4	0,0387 %	-0,0985%	-0,0771%	-0,0519%	-0,0093%	0,0864%	0,1293%	0,1552%	0,1776%
CMIG4	0,1369 %	-0,0346%	-0,0073%	0,0227%	0,0774%	0,1967%	0,2500%	0,2818%	0,3117%
ITAU4	0,1336 %	-0,0016%	0,0208%	0,0456%	0,0873%	0,1794%	0,2219%	0,2473%	0,2685%

A taxa livre de risco refere-se ao custo do dinheiro no tempo, ou seja, a taxa de juros utilizada para remunerar dinheiro em caixa. No Brasil, considera-se a taxa livre de risco o CDI. O CDI é a taxa de juros que rege o mercado financeiro brasileiro, sendo utilizado como taxa base em todas as operações monetárias que envolvem fluxo de caixa em períodos de tempo distintos. O CDI é uma taxa que acompanha a taxa SELIC (taxa de referencia imposta pelo Banco Central na economia), isto é, a diferença entre as duas taxas é muito pequena.

Na implementação do modelo, foi utilizada a taxa livre de risco como sendo igual a 97% do CDI (aproximadamente 16,70% em 15 de fevereiro de 2006). Esta taxa de juros reflete a taxa média das operações de aplicação de caixa, descontados os custos operacionais.

Assim, considerando que um ano possui 252 dias úteis, o retorno logarítmico da taxa livre de risco é de 0,0613% ao dia, valor possível de ser comparado com a série histórica dos retornos das ações.

4.4 Resultados

Para um intervalo de credibilidade de 80% (entre os quantis 10% e 90%) para os retornos esperados dos ativos, a solução do problema (P), definido na seção 4.2.1, que minimiza o valor máximo da função objetivo do modelo através dos valores de r , é dada na tabela 4.3 abaixo:

Tabela 4.3 - Valor esperado do retorno por ativo (solução do problema (P))

	Retorno			
	Retorno solução	Intervalo de credibilidade		
		10%	MÉDIA	90%
VALE5	0,0932 %	0,0932%	0,1745%	0,2556%
CSNA3	0,1029 %	0,1029%	0,2156%	0,3292%
PETR4	0,0787 %	0,0542%	0,1368%	0,2192%
EMBR4	0,0737 %	-0,0184%	0,0805%	0,1785%
AMBV4	0,0722 %	0,0166%	0,0932%	0,1699%
TNLP4	0,0795 %	-0,0519%	0,0387%	0,1293%
CMIG4	0,0801 %	0,0227%	0,1369%	0,2500%
ITAU4	0,0757 %	0,0456%	0,1336%	0,2219%

Uma vez determinados os valores esperados dos retornos de cada ativo, a composição do portfólio dependerá do fator de aversão ao risco do investidor (w), que quanto maior, mais conservador será o investidor.

A tabela 4.4 a seguir, resume os resultados obtidos para a composição do portfólio de acordo com o fator de aversão ao risco w , assim como, o valor esperado e a variância para o retorno do portfólio.

Tabela 4.4 - Composição do portfólio pelo fator de aversão ao risco (w)

	Retorno	Participação pelo fator w									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
VALE5	0,0932 %	266,3%	118,3%	69,0%	44,4%	29,6%	19,7%	12,7%	7,4%	3,3%	0,0%
CSNA3	0,1029 %	162,7%	72,3%	42,2%	27,1%	18,1%	12,1%	7,7%	4,5%	2,0%	0,0%
PETR4	0,0787 %	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
EMBR4	0,0737 %	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
AMBV4	0,0722 %	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TNLP4	0,0795 %	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
CMIG4	0,0801 %	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
ITAU4	0,0757 %	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
CDI *	0,0613 %	-329,0%	-90,7%	-11,2%	28,5%	52,3%	68,2%	79,6%	88,1%	94,7%	100,0%
TOTAL		100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
RETORNO		0,2140%	0,1292%	0,1009%	0,0868%	0,0783%	0,0726%	0,0686%	0,0655%	0,0632%	0,0613%
VARIÂNCIA		0,006872	0,001357	0,000462	0,000191	0,000085	0,000038	0,000016	0,000005	0,000001	0,000000

Deste modo, é possível traçar a fronteira eficiente para o modelo minimax proposto. A figura 4.5 ilustra esta fronteira eficiente.

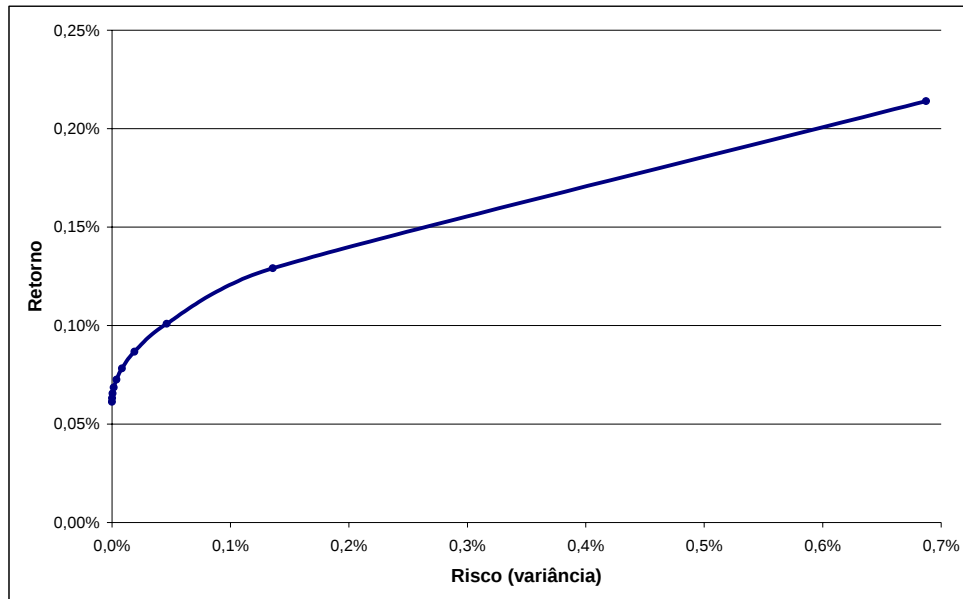


Figura 4.5 - Fronteira eficiente para o modelo minimax proposto

Para um valor de w mais próximo de zero, o investidor é mais agressivo, tendo o retorno um peso muito maior do que o risco (variância). Vale ressaltar que o modelo proposto permite participações negativas do ativo livre de risco, ou seja, permite que o investidor tome emprestado recursos a uma taxa CDI, para investir além do seu capital próprio nas ações. A figura 4.6 abaixo ilustra a participação de cada um dos ativos no portfólio solução do modelo proposto pelo parâmetro w de aversão ao risco.

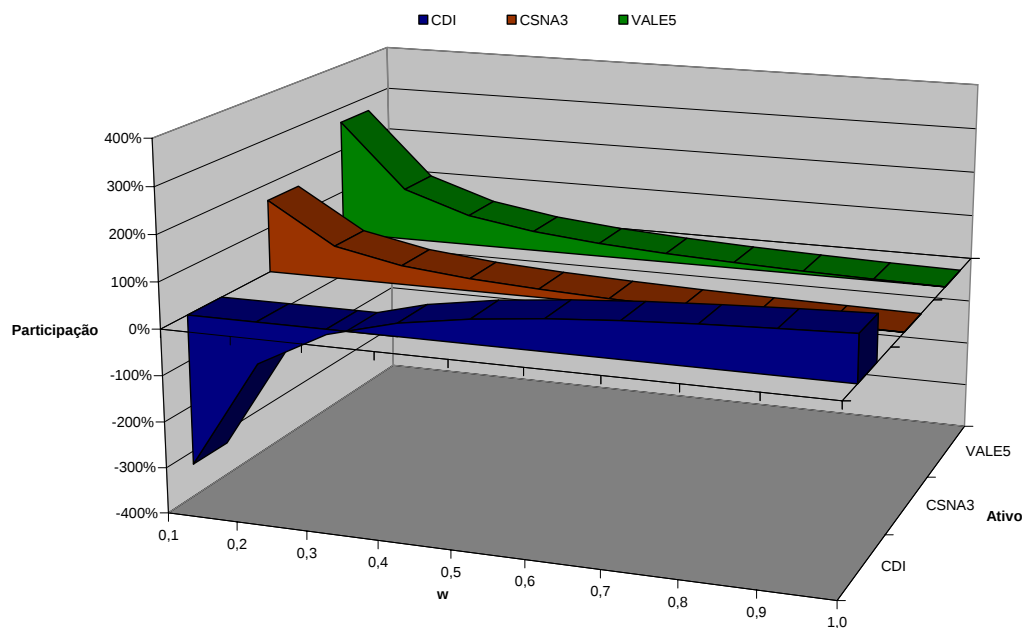


Figura 4.6 - Participação de cada ativo no portfólio solução pelo parâmetro w (I)

Considerando que o investidor queira investir apenas o seu capital próprio, a participação de cada ativo no portfólio ótimo pelo parâmetro w , é dada a seguir na figura 4.7.

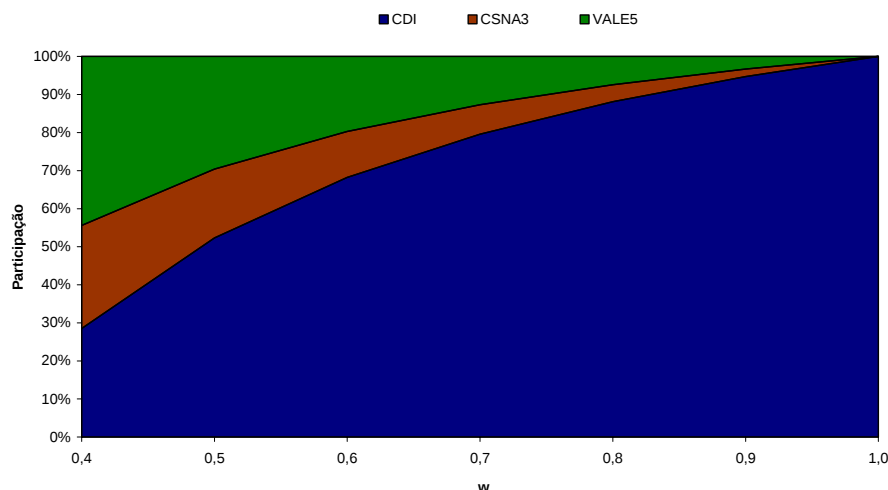


Figura 4.7 - Participação de cada ativo no portfólio solução pelo parâmetro w (II)

4.4.1 Análise através de janelas de tempo

Um dos objetivos deste capítulo é analisar a robustez, ou estabilidade da composição do portfólio proposta pelo modelo. Na gestão de portfólios, espera-se que não seja necessário realizar muitas alterações na composição do portfólio ao longo do tempo, devido aos altos custos de reestruturação e necessidade de liquidez. Para avaliar o desempenho do modelo minimax, sob esta ótica, utilizou-se uma abordagem usual em finanças que considera janelas de tempo.

As janelas de tempo foram definidas da mesma maneira que no capítulo anterior. A primeira janela contempla 1.000 observações, no período de 2 janeiro de 2002 até 3 de janeiro de 2006. A cada período de cálculo, as cinco observações mais antigas foram excluídas do histórico e as cinco observações posteriores a última data contemplada na janela foram acrescentadas. Foram feitos os cálculos para 12 janelas, de histórico fixo de 1.000 observações, alterando-se o histórico em cinco dias. As janelas de tempo estão explicitadas no apêndice D.

Os resultados obtidos para a composição do portfólio de acordo com o fator de aversão ao risco w , assim como, o valor esperado e a variância para o retorno do portfólio, em cada um dos períodos ou janelas de tempo são apresentados no apêndice F.

Em cada período de tempo, o modelo fornece uma fronteira eficiente, onde para determinado nível de variância, se tem o maior retorno possível. A figura 4.8 ilustra estas fronteiras para cada janela de tempo calculada anteriormente.

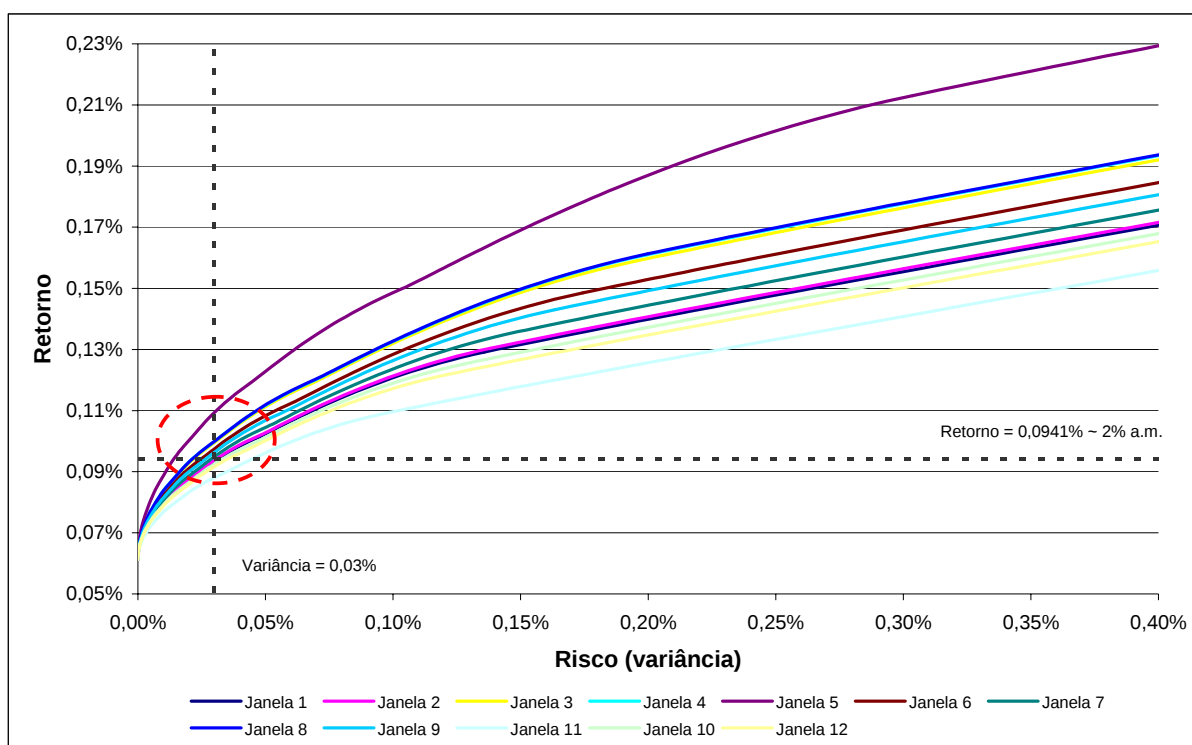


Figura 4.8 – Fronteiras eficientes soluções do modelo minimax por janela de tempo

Nota-se que as linhas pontilhadas na figura x.x representam o retorno de 0,0941% por dia de negociação (o que gera um retorno de 2% ao mês, aproximadamente), e a variância de 0,03% por dia de negociação. A área circulada em vermelho do gráfico indica onde cada fronteira eficiente cruza com as marcas de retorno e de variância. Para facilitar a análise de robustez e de desempenho do modelo, fixaremos estes objetivos de retorno e de variância para os estudos seguintes.

4.4.2 Análise de robustez

Os portfólios ótimos foram calculados para o modelo minimax, objeto de estudo deste capítulo, e para o modelo clássico de Markowitz, em duas fases. Primeiro, fixou-se o retorno mínimo esperado em 0,0941%, e posteriormente, fixou-se a variância máxima esperada em 0,03%, conforme a figura 4.8.

O modelo minimax, para cada janela de tempo, forneceu duas composições ótimas, uma quando foi fixado o retorno, e outra quando foi fixada a variância citados acima. Para tanto, foi necessário variar o fator de aversão ao risco w , em cada cálculo, para que os objetivos de retorno e variância fossem alcançados. Os parâmetros do modelo foram estimados através de inferência bayesiana.

O modelo clássico de Markowitz, descrito no item 4.1 deste capítulo, foi calculado para os parâmetros estimados tanto pela inferência bayesiana, quanto pelos estimadores clássicos. Vale ressaltar que para o caso dos parâmetros estimados pela inferência bayesiana, utilizou-se o valor esperado de cada parâmetro. Todas as rotinas de otimização foram realizadas através do software MATLAB, e estão contempladas no apêndice E, nos itens E.4.2, E.4.3 e E.5.

As figuras que seguem, usuais na literatura de finanças, resumem os resultados obtidos. Os gráficos descrevem a evolução da composição do portfólio ao longo do tempo, quando se toma a decisão com base, exclusivamente, no modelo de otimização. Considerou-se que o modelo é empregado a cada 5 dias de pregão (com operações na Bolsa), sendo que em cada período, o novo portfólio ótimo é determinado utilizando-se a série histórica de 1.000 observações anteriores à data da tomada de decisão. No eixo vertical são apresentados os percentuais de cada ativo que compõem o portfólio e cada textura refere-se a um particular ativo.

Análise 1: Valor esperado do retorno fixado ao longo do tempo (0,0941%)

o *Modelo Minimax*

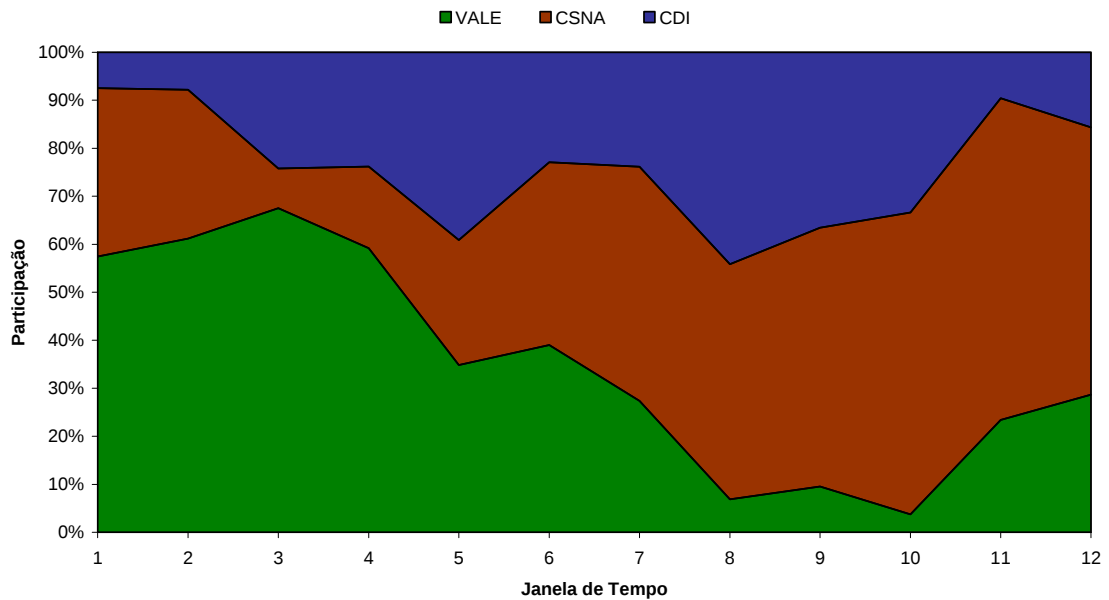


Figura 4.9 - Participação de cada ativo no portfólio por janela de tempo (minimax)

o *Modelo de Markowitz (com estimação bayesiana dos parâmetros)*

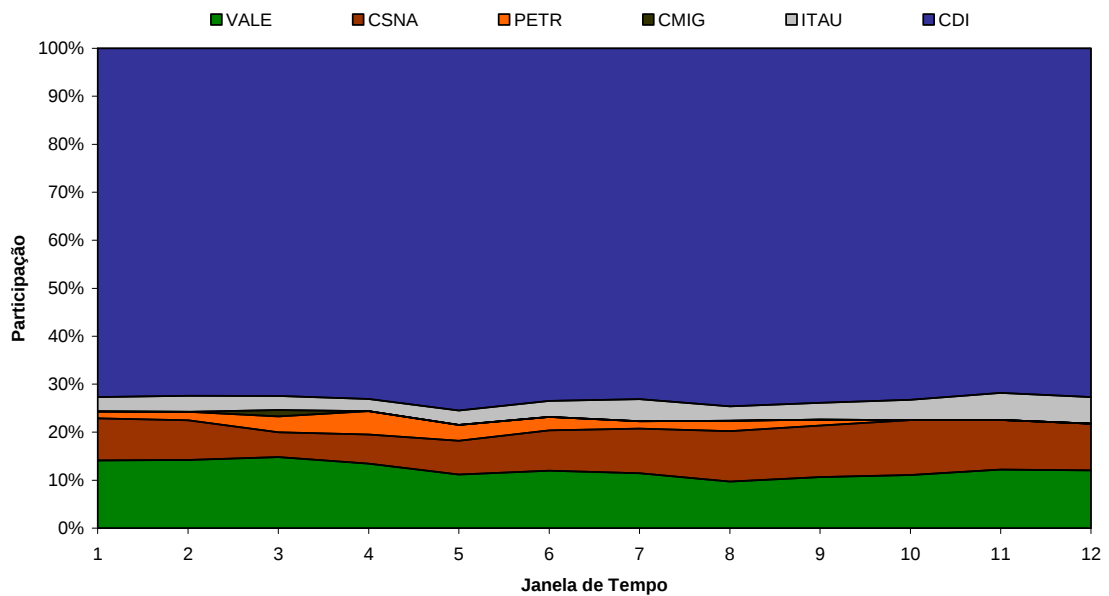


Figura 4.10 - Participação de cada ativo no portfólio por janela de tempo (Markowitz – est.bayesiana)

o *Modelo de Markowitz (com estimação clássica dos parâmetros)*

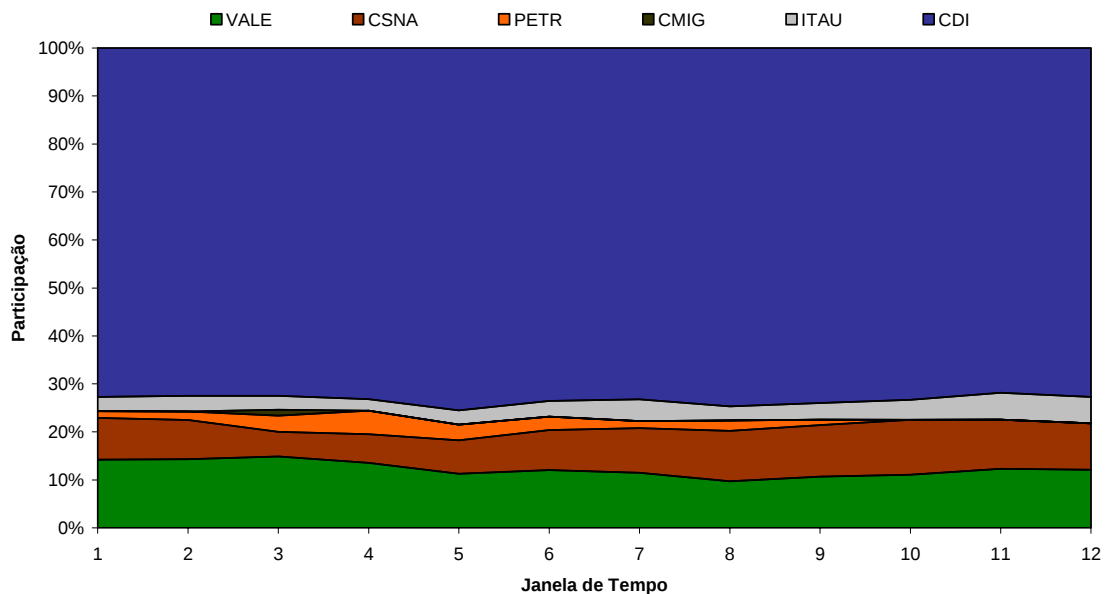


Figura 4.11 - Participação de cada ativo no portfólio por janela de tempo (Markowitz – est.clássica)

Considerando o retorno objetivo fixado, pode-se constatar que o modelo minimax proposto apresenta maiores alterações ao decorrer do tempo em sua composição do que o modelo de Markowitz. Contudo é importante destacar a maior participação do ativo livre de risco (CDI) no modelo de Markowitz, e também, que praticamente não há diferença entre os modelos de Markowitz, quando seus parâmetros são estimados pelo método clássico e pelo valor esperado do método bayesiano.

Análise 2: Variância do retorno fixada ao longo do tempo (0,03%)

o *Modelo Minimax*

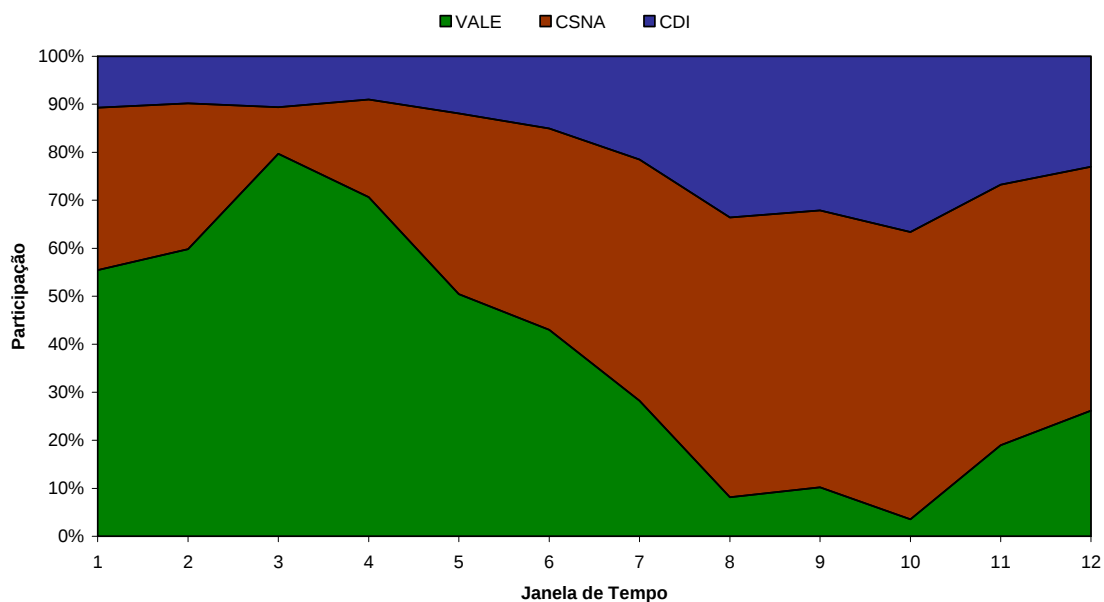


Figura 4.12 - Participação de cada ativo no portfólio por janela de tempo (minimax)

o *Modelo de Markowitz (com estimação bayesiana dos parâmetros)*

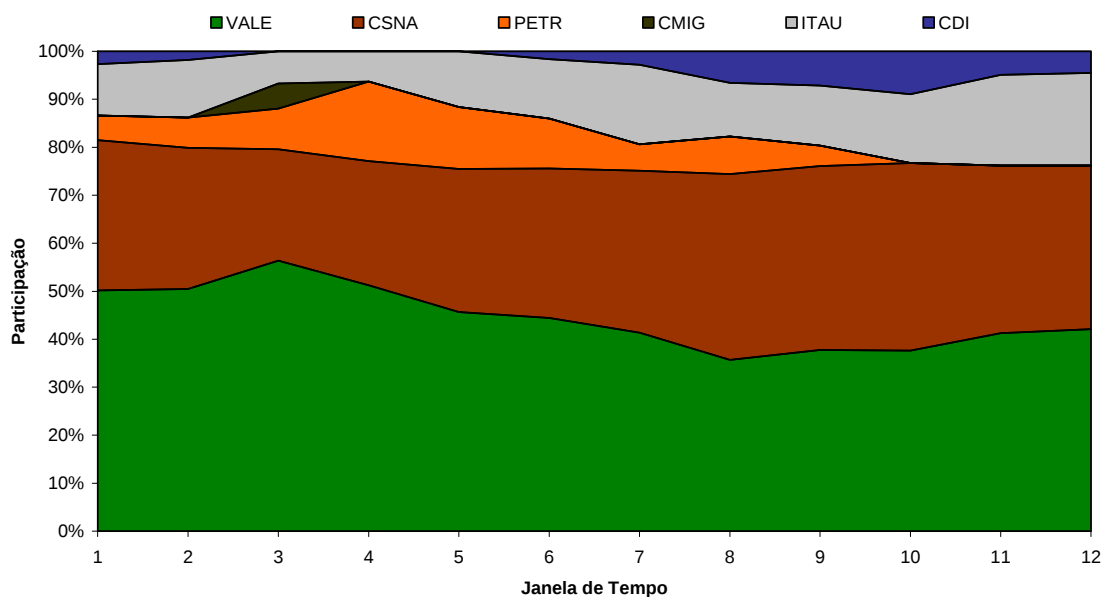


Figura 4.13 - Participação de cada ativo no portfólio por janela de tempo (Markowitz – est.bayesiana)

o *Modelo de Markowitz (com estimação clássica dos parâmetros)*

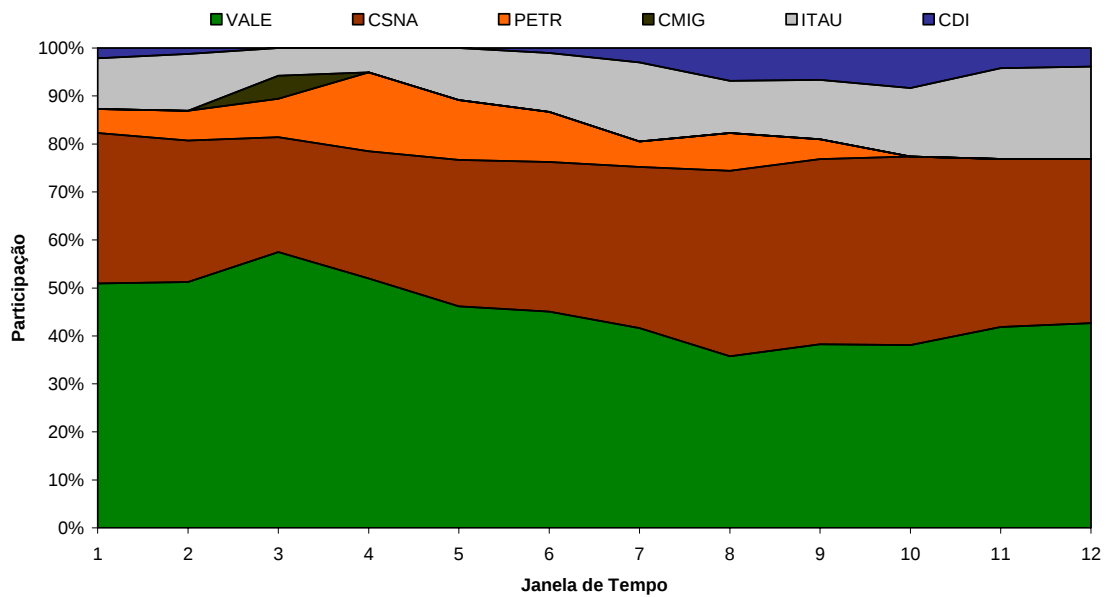


Figura 4.14 - Participação de cada ativo no portfólio por janela de tempo (Markowitz – est.clássica)

Com o objetivo de variância fixado ao decorrer do tempo, pode-se observar que o modelo minimax também se mostrou mais volátil em relação ao modelo de Markowitz, apresentando variações mais abruptas em sua composição. É importante ressaltar que a participação do ativo livre de risco (CDI) se tornou insignificante no modelo de Markowitz, e que também neste cenário, praticamente não há diferença entre os modelos de Markowitz, quando seus parâmetros são estimados pelo método clássico e pelo valor esperado do método bayesiano.

4.4.3 Análise de desempenho

A análise de desempenho foi realizada através da evolução do valor do portfólio, onde em cada momento de tomada de decisão (de 5 em 5 pregões) todo o capital do portfólio naquele momento foi redistribuído de acordo com a nova composição proposta pelos modelos. A figura 4.15 abaixo, representa a evolução do valor do portfólio para o modelo minimax e para o modelo de Markowitz com estimação clássica (que apresenta comportamento semelhante ao modelo com estimação bayesiana), quando o objetivo de retorno é fixado. A linha tracejada representa o desempenho do índice IBOVESPA, utilizado como benchmarking do comportamento do mercado.

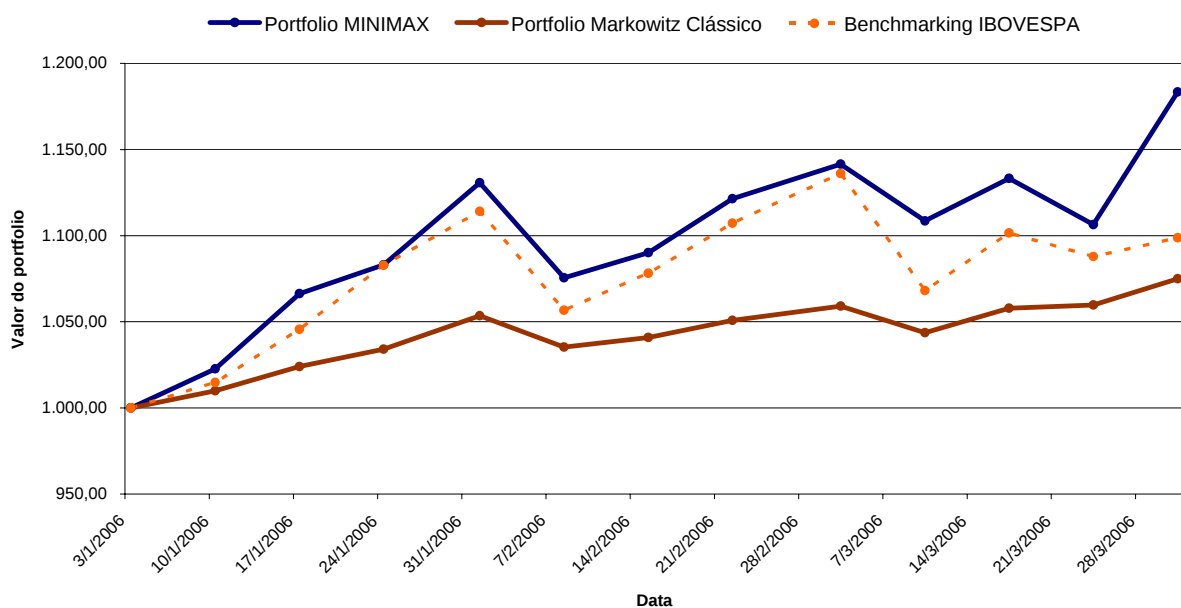


Figura 4.15 - Valor do portfólio ao longo do horizonte de investimento (retorno fixo)

Pode-se observar que o desempenho do modelo minimax, apesar de mais volátil (com maiores variações a cada período de análise), é mais satisfatório que o desempenho do modelo de Markowitz no período de tempo estudado. Isto se deve ao fato de que o modelo minimax trabalha com a hipótese do pior cenário para a média dos retornos dos ativos, sendo mais conservador no que diz respeito ao retorno objetivo ser alcançado, do que o modelo de Markowitz.

Quando o objetivo fixado é a variância e não o retorno, os dois modelos apresentam comportamentos similares, mesmo porque, o grande diferencial entre eles é a observância da incerteza nos retornos pelo modelo minimax e não pelo modelo de Markowitz. Ambos consideram a matriz de covariância entre os ativos com valores fixos. Vale lembrar, que ainda não há na literatura modelos que consigam utilizar incerteza na matriz de covariância para o cálculo de composição ótima de um portfólio. A figura 4.16 a seguir, ilustra a evolução do valor do portfólio para os dois modelos, quando o objetivo de variância é fixado.

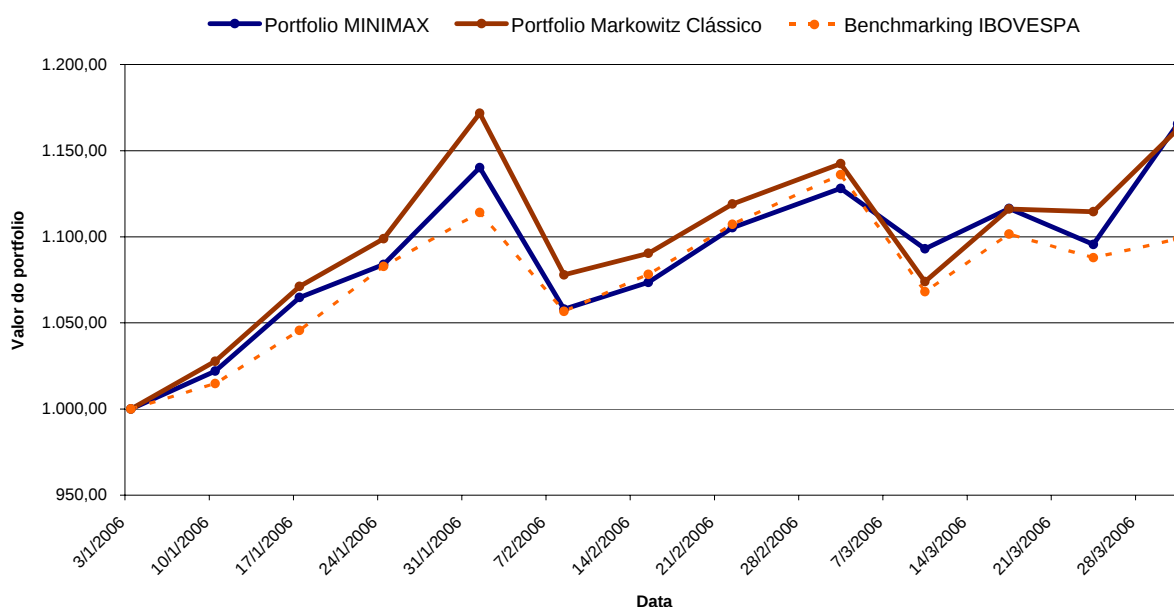


Figura 4.16 - Valor do portfólio ao longo do horizonte de investimento (variância fixa)

4.5 Conclusões preliminares

Embora estes resultados não permitam tirar conclusões quanto à superioridade de um modelo ou outro, visto que dependem da liquidez dos mercados, volumes financeiros envolvidos e custos específicos de compra ou venda de ativos, pode-se observar que os portfólios obtidos pelo modelo minimax são menos estáveis do que os obtidos pelo modelo de Markowitz. Apesar do modelo minimax trabalhar com certo intervalo para o valor esperado dos retornos de cada ativo, sua solução apresentou variações mais abruptas em relação à solução do modelo clássico de Markowitz.

Pode-se considerar como principal contribuição do modelo minimax, o fato de sua solução ser mais confiável na medida em que se tem um retorno fixado como objetivo. Ou seja, como o modelo minimax trabalha com o pior cenário dos retornos de cada ativo, ele é mais conservador no que diz respeito ao retorno objetivo ser atingido. Isto foi comprovado na seção 4.4.3.

É importante ressaltar que quando da opção pela composição de portfólio por um modelo ou outro, deve ser ponderado se a credibilidade no valor do retorno esperado do portfólio dada pelo modelo minimax justifica os custos referentes à menor robustez (estabilidade) de seu portfólio.

5

CONCLUSÕES

Este trabalho estudou o problema de composição de portfólios (carteiras de ativos financeiros) de mínimo risco, abordando a incerteza nos parâmetros dos modelos de auxílio à tomada de decisão. A alternativa utilizada para avaliação do impacto da incerteza foi estatística Bayesiana, muito pouco explorada na literatura até o momento, cujos estimadores fornecem uma distribuição de probabilidades para o valor dos parâmetros de uma distribuição.

Inicialmente, foram avaliadas as medidas de risco isoladamente, variância e valor em risco, através dos valores fornecidos para a distribuição de seus parâmetros. Pôde-se verificar que dependendo da metodologia empregada, os resultados podem divergir de maneira significativa. Para o valor em risco, medida de risco regulamentada, quando calculado pelo método clássico, pode estar sendo subestimado em até aproximadamente 6% em relação ao intervalo proposto pelos estimadores bayesianos. Já quando o seu valor é simulado (metodologia muito utilizada em modelos multiperíodo), este pode ser até três vezes maior que o valor em risco do portfólio calculado pelo método clássico. Conclui-se, portanto, que a incerteza pode causar grande impacto financeiro nas instituições, e que este impacto, depende muito da metodologia empregada.

O modelo minimax proposto por Deng; Li e Wang (2005) foi implementado como alternativa de modelo que contempla um intervalo estimado para os retornos de cada ativo, ou seja, o modelo resolve o problema de composição de portfólio de mínimo risco com a incorporação de incerteza em um de seus parâmetros. Estudos comparativos entre as soluções obtidas pelo modelo de Markowitz e pelo modelo minimax foram apresentados. Destes estudos depreende-se que as soluções obtidas pelos dois modelos possuem características distintas, que devem ser contempladas pelos investidores no momento de determinação de seus portfólios. Questões de natureza qualitativa e individual tornam impraticável a determinação do “melhor modelo”. Se o que se pretende é determinar um modelo mais robusto, que necessite de menos alterações em sua composição ao longo do tempo, o modelo apropriado é o de Markowitz. Caso se deseje maior credibilidade no que se refere ao alcance do retorno esperado, o modelo adequado será o minimax.

Neste contexto, a contribuição do trabalho foi a implementação dos conceitos de estatística Bayesiana no modelo minimax proposto por Deng; Li e Wang (2005). A abordagem apresentada para a resolução do problema de composição de portfólio de mínimo risco é muito recente, e vem ao encontro das dificuldades encontradas pelos gestores.

Destaque-se que a abordagem aqui proposta possui aplicações em diversos problemas de gestão financeira na indústria, que incluem até mesmo a determinação de portfólio de produtos. Neste caso, pode-se considerar, por exemplo, que o risco esteja associado ao lucro e que a incerteza decorra exclusivamente de flutuações de preços. Ao pressupor que a receita é função das quantidades produzidas, as variáveis de decisão passam a ser as quantidades, ou percentuais (financeiros) produzidos de cada produto. O risco pode, então, ser definido como a variância associada à distribuição de probabilidades do lucro. Torna-se assim natural obter o portfólio de produtos que minimiza a variância do lucro.

Entre os trabalhos futuros a serem realizados estão estudos sobre o desempenho do modelo minimax na composição de portfólios que utilizam outras medidas de risco, assim como a incorporação de incerteza também na matriz de covariâncias no modelo minimax.

6

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACERBI, C.; TASCHE, D. **On the coherence of expected shortfall.** Journal of Nanking and Finance, 2002. v. 26. n.7. p.1487-1503.

ANDERSON, T. W. **An introduction to multivariate statistical analysis.** New York: John Wiley & Sons, 1984.

BEST, M. J.; GRAUER, R. R. **Sensitivity analysis for mean-variance portfolio problems.** Management Science, 1991. p.981-989.

BLAKE, C. R.; ELTON E. J.; GRUBER, M. J. **Fundamental economic variables, expected returns, and bond fund performance.** Journal of Finance, setembro 1955. v.50. n.40. p.1229-1256.

CHOPRA, V. K.; HENSEL, C. R.; TURNER, A. L. **Massaging mean-variance inputs: returns from alternative global investment strategies in the 1980s.** Management Science, 1992. p.845-855.

CHOPRA, V. K.; ZIEMBA, W. T. **The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choices.** Cambridge University Press, 1998. p.53-61.

DAMODARAN, A. **Investment valuation: tools and techniques for determining the value of any asset.** New York: Editora Wiley, 1996.

DENG, X.; LI, Z.; WANG, S. **A minimax portfolio selection strategy with equilibrium.** European Journal of Operational Research, 2005. p.278-292.

FAN, K. **Minimax theorems.** Proceedings of the National Academy of Sciences. USA, 1953. p.42-47.

JORION, P. **Value at Risk: the new benchmark for controlling market risk.** New York: McGraw Hill, 1997.

KONNO, H.; YAMAZAKI, H. **Mean-absolute deviation portfólio optimization model and its applications to Tokyo stock market.** Management Science, 1991. v.37. p.519-531.

LEE, P. M. **Bayesian statistics: an introduction.** 3ª edição. Londres: Hodder Arnold, 2004. 351p.

LUENBERGER, D.G. **Investment science.** Oxford: Oxford University Press, 1998. 488p.

MARKOWITZ, H. M. **Portfólio selection.** Journal of Finance, 1952. v.7. n.1.

MARTINS, A. C. R. **Introdução à estatística.** São Paulo, 2006.

MORGAN, Banco J. P. **Riskmetrics.** New York:J. P. Morgan, 1994. 212p.

RIBEIRO, C. O.; FERREIRA, L. A. S. **Uma contribuição ao problema de composição de carteiras de mínimo valor em risco.** Gestão & Produção, 2005. v.12. n. 2. p.295-304.

RIBEIRO, C. O.; VIANNA, L. V. M. C. **Análise do impacto do uso de estimadores de medidas de risco na otimização de carteiras.** São Paulo, 2004. 103p.

SZEGÖ, G. **Measures of risk.** Journal of Banking and Finance, June 2002. v.26. p.1253-1272.

TOPALOGLOU, N.; VLADIMIROU, H.; ZENIOS, S. **CVaR models with selective hedging for international asset allocation.** Journal of Banking and Finance, junho 2002. v.26. p.1535-1561.

URYASEV, S.; PALMQUIST, J.; KROKHMAL, P. **Portfólio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints.** Research Report, September 2001.

WESTON, J. F.; BRIGHAM, E. F. **Fundamentos da administração financeira.** 10. ed. Editora Makron, 2000.

APÊNDICE A

INFERÊNCIA BAYESIANA

A.1 Teorema de Bayes

O teorema de Bayes é o resultado na teoria de probabilidade, que relaciona as distribuições condicionais e marginais da probabilidade de variáveis aleatórias. Ele indica como atualizar ou revisar uma opinião à luz de uma nova evidência, ou seja, o teorema de Bayes é usado na inferência estatística para atualizar estimativas da probabilidade, quantificando qualquer aumento de informação sobre determinado parâmetro que se quer medir (LEE, 2004).

A probabilidade do evento A condicional a um outro evento B é geralmente diferente da probabilidade do evento B condicional ao evento A. Entretanto, há um relacionamento definitivo entre os dois, e o teorema de Bayes é a indicação desse relacionamento.

A probabilidade do evento A condicional ao evento B, é dada por

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (\text{A.1})$$

Da mesma forma, a probabilidade do evento B condicional ao evento A, é

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \quad (\text{A.2})$$

Rearranjando essas duas equações, tem-se

$$P(A | B) \times P(B) = P(A \cap B) = P(B | A) \times P(A). \quad (\text{A.3})$$

E dividindo ambos os lados por $P(B)$, considerando que $P(B)$ seja diferente de zero, se obtém o teorema de Bayes para variáveis aleatórias discretas:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}. \quad (\text{A.4})$$

Considerando $P(B)$ uma constante de proporcionalidade, já que não depende de A , temos para $P(B) \neq 0$,

$$P(A|B) \propto P(B|A) \times P(A), \quad (\text{A.5})$$

sendo $\propto$ um símbolo de proporcionalidade.

A.2 Teorema de Bayes para variáveis aleatórias contínuas

Ao lidar com distribuições contínuas de probabilidade e não apenas com eventos, os resultados do teorema de Bayes devem ser estendidos. Considerando θ um parâmetro ou parâmetros de interesse e D um conjunto completo de dados; para se calcular o valor de $P(\theta|D)$ é necessário assumir um valor para a probabilidade de obter um valor exato de D , que no caso de distribuições contínuas sempre será nula. A extensão do teorema de Bayes para variáveis aleatórias contínuas se dá através do uso da densidade de probabilidade marginal de D , que na verdade, condiciona a probabilidade à uma vizinhança de D tão pequena quanto se queira (LEE, 2004).

Considerando x e y um par de variáveis aleatórias, temos que a densidade de probabilidade marginal de x é dada por:

$$p(x) = \int p(y, x) dy. \quad (\text{A.6})$$

E a probabilidade de x condicional a y é

$$p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(y)}, \quad (\text{A.7})$$

ou

$$p(x, y) = p(x | y) \times p(y). \quad (\text{A.8})$$

Pode se escrever então,

$$p(x) = \int p(y) \frac{p(x, y)}{p(y)} dy = \int p(y) \times p(x | y) dy. \quad (\text{A.9})$$

E o teorema de Bayes para variáveis aleatórias contínuas é definido como

$$p(y | x) = \frac{p(x | y) \times p(y)}{p(x)} = \frac{p(x | y) \times p(y)}{\int p(y) \times p(x | y) dy}. \quad (\text{A.10})$$

De modo que

$$p(y | x) \propto p(x | y) \times p(y), \quad (\text{A.11})$$

com a constante de proporcionalidade

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{\int p(y) \times p(x | y) dy}. \quad (\text{A.12})$$

A.3 Teorema de Bayes e a atualização de informação

Dada uma variável de interesse θ , sobre o qual não se possui informação total, a informação que se dispõe sobre θ até o momento, pode ser resumida probabilisticamente através de $p(\theta)$, que é chamada de distribuição *a priori* de θ .

Observando-se uma variável aleatória X relacionada com θ , onde $p(X=x | \theta)$ expressa a dependência entre X e θ , o conhecimento sobre a distribuição dos valores de θ será aumentado, pois a quantidade de informação sobre θ é aumentada.

Sendo assim, com o conhecimento *a priori* sobre θ , e com a nova informação observada através da variável aleatória X , chega-se a uma nova distribuição de probabilidade para θ ; atualizada através do teorema de Bayes, onde:

$$p(\theta | x) \propto p(x | \theta) \times p(\theta), \quad (\text{A.13})$$

sendo $\propto$, um símbolo de proporcionalidade (LEE, 2004).

Para um valor fixo de x , o termo $p(x | \theta)$ é a probabilidade de ocorrer o dado x , dado que o conjunto total de valores é θ . Ou seja, $p(x | \theta)$ é uma função ($l(\theta; x)$) que fornece a *plausibilidade* ou *verossimilhança* de cada um dos possíveis valores de θ ; representando, então, a modificação de conhecimento sobre o experimento de acordo com os dados observados.

Com a definição de $p(x)$ como a distribuição *a priori*, $p(x | \theta)$ como a função de verossimilhança, onde $l(\theta; x) = p(x | \theta)$, e $p(\theta | x)$ como a distribuição *a posteriori* para θ dado x , o teorema de Bayes pode ser escrito como

$$\text{distribuição a posteriori} \propto \text{verossimilhança} \times \text{distribuição a priori}.$$

Portanto, partindo de uma distribuição *a priori*, com a observação de um novo experimento, chega-se a uma distribuição *a posteriori*, mais rica em informação do que a *a priori*.

A.4 Teorema de Bayes e seu uso sequencial

O teorema de Bayes pode ser aplicado quantas vezes forem necessárias (LEE, 2004). A cada novo experimento, deve-se atualizar a distribuição de probabilidades. Dado uma variável de interesse θ e um conjunto de observações X relacionadas com θ , temos

$$p(\theta | x) \propto l(\theta; x) \times p(\theta). \quad (\text{A.14})$$

Após um segundo conjunto de observações Y relacionadas com θ , independentes de X , pode-se aplicar mais uma vez o teorema, obtendo

$$p(\theta | x, y) \propto l(\theta; x, y) \times p(\theta). \quad (\text{A.15})$$

Como as observações X e Y são independentes,

$$p(x, y | \theta) = p(x | \theta) \times p(y | \theta), \quad (\text{A.16})$$

o que implica em

$$l(\theta; x, y) = l(\theta; x) \times l(\theta; y), \quad (\text{A.17})$$

e logo

$$p(\theta | x, y) \propto l(\theta; x) \times l(\theta; y) \times p(\theta), \quad (\text{A.18})$$

$$p(\theta | x, y) \propto p(\theta | x) \times l(\theta; y). \quad (\text{A.19})$$

A distribuição *a posteriori* para θ dados X e Y pode ser obtida utilizando a distribuição *a posteriori* para o conjunto de dados X como a distribuição *a priori* para o conjunto de dados Y . Os conceitos de *priori* e *posteriori* são relativos àquela observação que está sendo considerada no momento. É importante ressaltar que a *posteriori* final independe da ordem em que as observações x e y foram processadas.

A.5 Suficiência

No item A.4 é explicitado que o teorema de Bayes pode ser utilizado inúmeras vezes, atualizando a distribuição de probabilidades, sempre que há uma nova evidência ou experimento. Isto exige que se altere a opinião para cada dado coletado. No entanto, em certos problemas, dependendo do formato da verossimilhança, a informação obtida no final de todo

o processo de inferência é a mesma que a obtida a partir de apenas algumas características dos dados amostrais (LEE, 2004).

Desta forma, os cálculos podem ser bastante simplificados. Por exemplo, na avaliação da média de uma população, se os dados são gerados a partir de uma distribuição normal que utiliza esta média desconhecida e uma variância conhecida, a informação utilizada na atualização através do teorema de Bayes é a mesma que a contida na média da amostra. Neste caso, possuindo-se uma amostra de tamanho n , ao invés de utilizar o teorema de Bayes n vezes, pode-se simplesmente calcular a média amostral e obter uma inferência completa para a média da população sem que qualquer informação tenha sido desprezada.

Esta propriedade é chamada de suficiência e disse, neste caso, que a média da amostra é estatística suficiente para determinar a média da população. É importante ressaltar que a suficiência é uma propriedade associada a um problema específico através da verossimilhança. Se não se sabe que uma dada estatística da amostra é suficiente, deve-se utilizar o teorema de Bayes quantas vezes forem necessárias.

A.6 Família Conjugada

Para o caso de algumas verossimilhanças específicas, é possível encontrar formas para as prioris que permitam obter de forma simples a distribuição a posteriori, resultando em fórmulas fechadas, que facilitam o seu uso (LEE, 2004). Uma distribuição de probabilidades pertence a uma família conjugada de determinada verossimilhança, se juntamente com a distribuição a priori de mesmo tipo, gere uma distribuição a posteriori de mesmo formato.

As distribuições normal e qui-quadrada inversa são exemplos de distribuições de famílias conjugadas. Sendo assim, por exemplo, para o cálculo da média de uma população, dada uma observação x , com distribuição normal, a utilização de uma priori normal resulta em uma distribuição a posteriori também normal.

A.7 Inferência bayesiana para distribuição normal

Através de um novo experimento, aumenta-se a quantidade de informação sobre determinada variável que se quer medir. Considerando que um novo experimento, cujas observações são $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, possui como modelo para seus resultados uma distribuição normal $N(\theta, \phi)$, e que o que se quer medir são os parâmetros θ e ϕ , tem-se através do teorema de Bayes:

$$p(\theta, \phi | x) \propto p(x | \theta, \phi) \times p(\theta, \phi). \quad (\text{A.20})$$

A distribuição de *verossimilhança* $p(x | \theta, \phi)$ é dada pelo resultado do experimento (modelado por uma distribuição normal), e pode ser escrita como

$$p(x | \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\phi}} e^{-\frac{1(x-\theta)^2}{2\phi}}, \quad (\text{A.21})$$

$$p(\mathbf{x} | \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\phi}} e^{-\frac{1(x_1-\theta)^2}{2\phi}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\phi}} e^{-\frac{1(x_2-\theta)^2}{2\phi}} \times \dots \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\phi}} e^{-\frac{1(x_n-\theta)^2}{2\phi}}, \quad (\text{A.22})$$

$$p(\mathbf{x} | \theta, \phi) \propto \frac{1}{\phi^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1 \sum (x_i - \theta)^2}{2\phi}}. \quad (\text{A.23})$$

E definindo-se

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i, \quad (\text{A.24})$$

$$S = \sum (x_i - \bar{x})^2 \text{ e} \quad (\text{A.25})$$

$$s^2 = \frac{S}{(n-1)}; \quad (\text{A.26})$$

obtem-se

$$p(\mathbf{x} | \theta, \phi) \propto \frac{1}{\phi^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1 \sum (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \theta)^2}{2\phi}}, \quad (\text{A.27})$$

$$p(\mathbf{x}|\theta, \phi) \propto \frac{1}{\phi^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \frac{S+n(\bar{x}-\theta)^2}{\phi}}. \quad (\text{A.28})$$

Se não há nenhuma informação anterior sobre os parâmetros do modelo, é coerente que se defina uma distribuição *a priori* não informativa para eles, ou seja, que não interfira na estimação, como por exemplo,

$$p(\theta, \phi) \propto \frac{1}{\phi}, \quad (\text{A.29})$$

que é o produto das distribuições *a priori* $p(\theta) \propto 1$ para θ e $p(\phi) \propto \frac{1}{\phi}$ para ϕ .

Definidas as distribuições de *verossimilhança* e *a priori*; a distribuição *a posteriori* para os parâmetros é dada por

$$p(\theta, \phi | \mathbf{x}) \propto \phi^{-\frac{(v+1)}{2-1}} e^{-\frac{1}{2} \frac{S+n(\bar{x}-\theta)^2}{\phi}}, \quad (\text{A.30})$$

onde $v = n - 1$ (LEE, 2004).

A.7.1 Distribuição marginal da média

No item anterior foi definida a distribuição de probabilidade para média e a variância, dado um experimento. Se o objetivo do estudo for somente a distribuição de probabilidade da média, pode-se utilizar a distribuição marginal de θ , dada por

$$p(\theta, \mathbf{x}) = p(\theta, \phi | \mathbf{x}) d\phi, \quad (\text{A.31})$$

$$p(\theta, \mathbf{x}) \propto \int_0^{\infty} \phi^{-\frac{v+1}{2-1}} e^{-\frac{1}{2} \frac{S+n(\bar{x}-\theta)^2}{\phi}} d\phi. \quad (\text{A.32})$$

Definindo

$$A = S + n(\bar{x} - \theta)^2 \quad \text{e} \quad (\text{A.33})$$

$$x = \frac{1}{2} \frac{A}{\phi}; \quad (\text{A.34})$$

obtém-se

$$p(\theta, \mathbf{x}) \propto \frac{1}{A^{\frac{v+1}{2}}} \int_0^{\infty} x^{\frac{v+1}{2}-1} e^{-x} dx. \quad (\text{A.35})$$

E como a distribuição segue a mesma forma de uma função gama, dada por

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx, \text{ dependendo apenas de } v \text{ que é definido pelo número de observações,}$$

chega-se a

$$p(\theta, \mathbf{x}) \propto \frac{1}{A^{\frac{v+1}{2}}}, \quad (\text{A.36})$$

$$p(\theta, \mathbf{x}) \propto \left\{ S + n(\bar{x} - \theta)^2 \right\}^{-\frac{v+1}{2}}, \quad (\text{A.37})$$

definindo-se a distribuição *a posteriori* de θ .

A.7.2 Distribuição marginal da variância

Já se o objetivo do estudo for a distribuição de probabilidade da variância, utiliza-se a distribuição marginal de ϕ , dada por

$$p(\phi | \mathbf{x}) = \int p(\theta, \phi | \mathbf{x}) d\theta, \quad (\text{A.38})$$

$$p(\phi | \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{\frac{v+1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2} \frac{S+n(\theta-\bar{x})^2}{\phi}} d\theta, \quad (\text{A.39})$$

$$p(\phi | \mathbf{x}) \propto \phi^{-\frac{\nu}{2-1}} e^{-\frac{1}{2}\frac{S}{\phi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{2\pi\phi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{n(\theta-\bar{x})^2}{\phi}} d\theta. \quad (\text{A.40})$$

Sendo o resultado da integral uma constante, por se tratar de uma integral da distribuição normal em toda a extensão da reta, obtém-se

$$p(\phi | \mathbf{x}) \propto \phi^{-\frac{\nu}{2-1}} e^{-\frac{1}{2}\frac{S}{\phi}}, \quad (\text{A.41})$$

definindo-se a distribuição *a posteriori* de ϕ , que é uma distribuição qui-quadrada inversa com ν graus de liberdade, dada por $S\chi_{\nu}^{-2}$.

A.8 Inferência bayesiana para distribuição normal II

No item A.7 foi discutida a inferência bayesiana para o caso em que a distribuição *a priori* era não informativa, ou seja, não se levava em consideração nenhum conhecimento existente sobre os parâmetros do modelo. Para considerar essa informação inicial deve-se definir uma distribuição *a priori* que exprima tal informação.

Verificou-se no item A.7.2 que a distribuição de probabilidades da variância, dado um modelo com distribuição normal, é uma distribuição qui-quadrada inversa. E como esta distribuição pode ser conjugada, a distribuição *a priori* de ϕ também deve ser uma qui-quadrada inversa. Obtém-se então,

$$p(\phi) \propto \phi^{-\frac{\nu_0}{2-1}} e^{-\frac{1}{2}\frac{S_0}{\phi}}, \quad (\text{A.42})$$

sendo $p(\phi)$, uma distribuição qui-quadrada inversa com ν_0 graus de liberdade, que é o número de observações subtraídos de um, existentes no conhecimento *a priori*.

Considerando um modelo com distribuição normal, e sendo esta uma distribuição conjugada, a distribuição *a priori* de θ pode ser definida como uma normal com média θ_0 e variância ϕ/n_0 , condicional a ϕ , onde esta distribuição tem o “peso” de n_0 observações de ϕ . Assim,

$$p(\theta|\phi) = \sqrt{\frac{n_0}{2\pi\phi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\theta-\theta_0)^2}{\phi/n_0}}. \quad (\text{A.43})$$

A distribuição *a priori* conjunta resultante é uma normal/qui-quadrada, dada por

$$p(\theta, \phi) = p(\phi) p(\theta|\phi), \quad (\text{A.44})$$

$$p(\theta, \phi) \propto \phi^{-\frac{v_0-1}{2-1}} e^{-\frac{1}{2} \frac{S_0+n_0(\theta-\theta_0)^2}{\phi}}, \quad (\text{A.45})$$

$$p(\theta, \phi) \propto \phi^{-\frac{v_0-1}{2-1}} e^{-\frac{1}{2} \frac{Q_0(\theta)}{\phi}}, \quad (\text{A.46})$$

onde $Q_0(\theta)$ é a quádrlica $Q_0(\theta) = n_0\theta^2 - 2(n_0\theta_0)\theta + (n_0\theta_0^2 + S_0)$.

A distribuição *a posteriori* é definida pelo teorema de Bayes, onde

$$p(\theta, \phi|\mathbf{x}) \propto p(\theta, \phi) l(\theta, \phi|\mathbf{x}), \quad (\text{A.47})$$

$$p(\theta, \phi|\mathbf{x}) \propto \phi^{-\frac{v_0-1}{2-1}} e^{-\frac{1}{2} \frac{S_0+n_0(\theta-\theta_0)^2}{\phi}} \phi^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{S+n(\theta-\bar{x})^2}{\phi}}, \quad (\text{A.48})$$

$$p(\theta, \phi|\mathbf{x}) \propto \phi^{-\frac{v_0+n+1}{2-1}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(S_0+S)+n_0(\theta-\theta_0)^2+n(\theta-\bar{x})^2}{\phi}}, \quad (\text{A.49})$$

$$p(\theta, \phi|\mathbf{x}) \propto \phi^{-\frac{v_1+1}{2-1}} e^{-\frac{1}{2} \frac{Q_1(\theta)}{\phi}}, \quad (\text{A.50})$$

onde $Q_1(\theta)$ é uma outra quádrlica, definida por

$$Q_1(\theta) = (S_0 + S) + n_0(\theta - \theta_0)^2 + n(\theta - \bar{x})^2, \quad (\text{A.51})$$

$$Q_1(\theta) = (n_0 + n)\theta^2 + 2(n_0\theta_0 - n\bar{x})\theta + (n_0\theta_0^2 + n\bar{x}^2 + S_0 + S), \text{ e} \quad (\text{A.52})$$

$$v_1 = v_0 + n. \quad (\text{A.53})$$

Definindo-se

$$n_1 = n_0 + n, \quad (\text{A.54})$$

$$\theta_1 = \frac{n_0 \theta_0 + n \bar{x}}{n_1}, \quad (\text{A.55})$$

$$S_1 = S_0 + S + \frac{1}{\left(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n}\right)} (\theta_0 - \bar{x})^2, \quad (\text{A.56})$$

$$S_1 = S_0 + S + n_0 \theta_0^2 + n \bar{x}^2 - n_1 \theta_1^2, \quad (\text{A.57})$$

pode-se escrever

$$Q_1(\theta) = S_1 + n_1(\theta - \theta_1)^2 = n_1 \theta^2 - 2(n_1 \theta_1) \theta + (n_1 \theta_1^2 + S_1). \quad (\text{A.58})$$

Se considerarmos os parâmetros θ e ϕ independentes entre si, pode-se utilizar as distribuições marginais para determinar os seus valores (LEE, 2004).

Através das distribuições marginais, chega-se à distribuição a posteriori para ϕ , uma qui-quadrada inversa, dada por

$$\phi \sim S_1 \chi_{\nu_1}^{-2}. \quad (\text{A.59})$$

Dado ϕ , determina-se a distribuição de θ , uma normal, definida como

$$\theta | \phi \sim N(\theta_1, \phi / n). \quad (\text{A.60})$$

As características das distribuições normal e qui-quadrada inversa são contempladas no apêndice B.

APÊNDICE B

DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIAS

B.1 Distribuição normal

Se X é normal com média θ e variância ϕ , dado por $X \sim N(\theta, \phi)$, a média e variância são dadas por

$$E(X) = \theta, \quad (B.1)$$

$$V(X) = \phi. \quad (B.2)$$

Notação: ‘E’ é o valor esperado, e ‘V’ é a variância da distribuição.

B.2 Distribuição qui-quadrada inversa

Se X tem uma distribuição qui-quadrada com ν graus de liberdade, dada por $X \sim \chi_\nu^2$, e se temos $Y = S \cdot X$, tal que $\frac{1}{Y} \sim \frac{1}{S} \chi_\nu^{-2}$, então $Y \sim S \chi_\nu^{-2}$.

A média e a variância são dadas por

$$E(Y) = \frac{S}{\nu - 2} \text{ (desde que } \nu > 2), \quad (B.3)$$

$$V(Y) = \frac{2S^2}{(\nu - 2)^2 (\nu - 4)} \text{ (desde que } \nu > 4). \quad (B.4)$$

APÊNDICE C

INFERÊNCIA BAYESIANA – APLICATIVO WINBUGS

O software WinBugs© realiza a análise de modelos estatísticos através do método de Monte Carlo de cadeias de Markov (MCMC – Markov Chain Monte Carlo) e fornece informações sobre os parâmetros desses modelos. O modelo utilizado considera que os retornos logarítmicos dos ativos que compõem o portfólio possuem distribuição normal multivariada, e que a matriz de covariâncias possui distribuição de Wishart. Foram também utilizadas distribuições a priori não informativas, indicando a falta de informação anterior sobre os parâmetros ou a não-influência da informação anterior sobre a estimação.

C.1 Modelo

```
model
{
  for (i in 1 : N){
    Y[i, 1 : 8] ~ dmnorm(mu[,], tau[,])
  }

  sigma[1:8,1:8]<-inverse(tau[,])
  R[1, 1] <- R11
  R[1, 2] <- R12
  R[2, 1] <- R12
  R[2, 2] <- R22
  R[1, 3] <- R13
  R[2, 3] <- R23
  R[3, 1] <- R13
  R[3, 2] <- R23
  R[3, 3] <- R33
  R[1, 4] <- R14
  R[2, 4] <- R24
  R[3, 4] <- R34
  R[4, 1] <- R14
  R[4, 2] <- R24
  R[4, 3] <- R34
  R[4, 4] <- R44
  R[1, 5] <- R15
  R[2, 5] <- R25
  R[3, 5] <- R35
  R[4, 5] <- R45
  R[5, 1] <- R15
```

```

R[5, 2] <- R25
R[5, 3] <- R35
R[5, 4] <- R45
R[5, 5] <- R55
R[1, 6] <- R16
R[2, 6] <- R26
R[3, 6] <- R36
R[4, 6] <- R46
R[5, 6] <- R56
R[6, 1] <- R16
R[6, 2] <- R26
R[6, 3] <- R36
R[6, 4] <- R46
R[6, 5] <- R56
R[6, 6] <- R66
R[1, 7] <- R17
R[2, 7] <- R27
R[3, 7] <- R37
R[4, 7] <- R47
R[5, 7] <- R57
R[6, 7] <- R67
R[7, 1] <- R17
R[7, 2] <- R27
R[7, 3] <- R37
R[7, 4] <- R47
R[7, 5] <- R57
R[7, 6] <- R67
R[7, 7] <- R77
R[1, 8] <- R18
R[2, 8] <- R28
R[3, 8] <- R38
R[4, 8] <- R48
R[5, 8] <- R58
R[6, 8] <- R68
R[7, 8] <- R78
R[8, 1] <- R18
R[8, 2] <- R28
R[8, 3] <- R38
R[8, 4] <- R48
R[8, 5] <- R58
R[8, 6] <- R68
R[8, 7] <- R78
R[8, 8] <- R88

for (i in 1:8){
  for (j in 1:8)
    {
      ro[i,j]<-sigma[i,j]/sqrt(sigma[i,i]*sigma[j,j])
    }
}

#priors

tau[1 : 8,1 : 8] ~ dwish(R[ , ], 8)
mu[1]~dnorm(0,1.0E-2)
mu[2]~dnorm(0,1.0E-2)

```

```

mu[3]~dnorm(0,1.0E-2)
mu[4]~dnorm(0,1.0E-2)
mu[5]~dnorm(0,1.0E-2)
mu[6]~dnorm(0,1.0E-2)
mu[7]~dnorm(0,1.0E-2)
mu[8]~dnorm(0,1.0E-2)
}

```

C.2 Entradas

C.2.1 Dados históricos

Y[,1]	Y[,2]	Y[,3]	Y[,4]	Y[,5]	Y[,6]	Y[,7]	Y[,8]
-0.0133335308694651	0.0020366605818033	-0.022875189391985	0.035973469286268				
0.0363424663525316	0.0164567619635105	0.0417451916884061	0.0452091397517258				
0.00802143338457509	0.0070958229814690	0.0633431389448325	0.0232738378715501				
-0.0240809709932682	0.0254266159926666	0.0367934478818006	-0.016796260494134				
0	-0.006079046076382	0.0140649294674037	-.0000272253304491				
-0.0122614953592634	0.0063447516333342	-0.005763704716750	-0.011136702065722				
0.00531209748488988	0.0211169234409228	-0.003731347612858	0				
0.0363424663525316	0.0038576235809754	-0.008291921473108	-0.011262126322113				
0.00791560861266122	-0.007992050531337	0.0027998151747466	0.0000272253304416				
-0.0487561742644306	-0.018368584273976	-0.012989916574523	0.0171734735851704				
(...)							
END							

C.2.2 Parâmetros do modelo

```

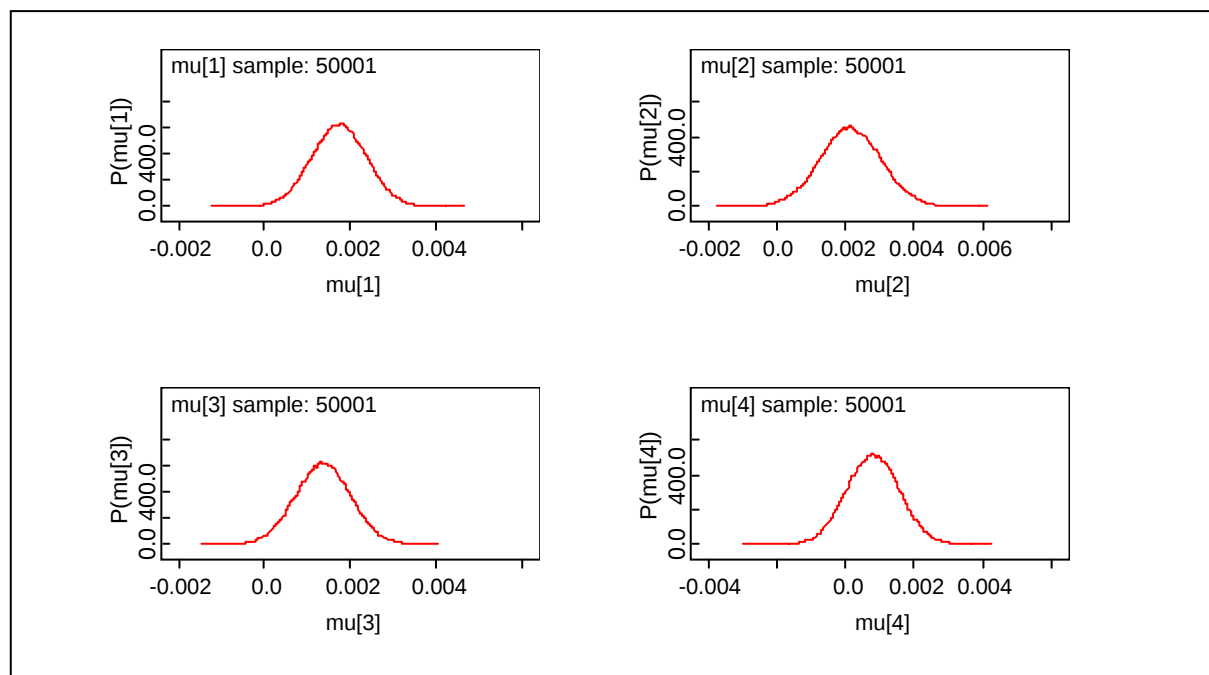
List (N=1000, R11=1.0E-2, R12=0, R22=1.0E-2, R23=0,R13=0, R33=1.0E-2, R14=0, R24=0,
R34=0, R44=1.0E-2, R15=0, R25=0, R35=0, R45=0, R55=1.0E-2, R16=0, R26=0, R36=0,
R46=0, R56=0, R66=1.0E-2, R17=0, R27=0, R37=0, R47=0, R57=0, R67=0, R77=1.0E2,
R18=0, R28=0, R38=0, R48=0, R58=0, R68=0, R78=0, R88=1.0E-2)

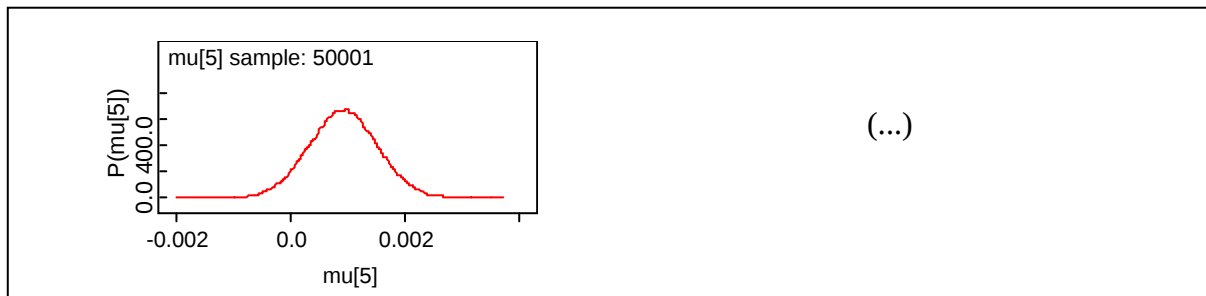
```

C.3 Saídas

C.3.1 Valor esperado (média) dos retornos

	mean	sd	MC_error	val2.5pc	val5.0pc	val10.0pc	val25.0pc
mu[1]	0.001745	6.339E-4	3.432E-6	5.059E-4	7.065E-4	9.323E-4	0.001314
mu[2]	0.002156	8.881E-4	5.571E-6	4.159E-4	6.951E-4	0.001029	0.001559
mu[3]	0.001368	6.449E-4	4.005E-6	1.091E-4	3.059E-4	5.416E-4	9.33E-4
mu[4]	8.045E-4	7.69E-4	4.135E-6	-6.894E-4	-4.601E-4	-1.844E-4	2.82E-4
mu[5]	9.319E-4	5.981E-4	3.377E-6	-2.401E-4	-5.312E-5	1.658E-4	5.307E-4
(...)							
	median	val75.0pc	val90.0pc	val95.0pc	val97.5pc	start	sample
mu[1]	0.001745	0.002176	0.002556	0.002787	0.002988	100000	50001
mu[2]	0.002151	0.002754	0.003292	0.003623	0.00391	100000	50001
mu[3]	0.001367	0.0018	0.002192	0.002428	0.002633	100000	50001
mu[4]	8.063E-4	0.001326	0.001785	0.002074	0.002309	100000	50001
mu[5]	9.324E-4	0.001334	0.001699	0.001923	0.00211	100000	50001
(...)							

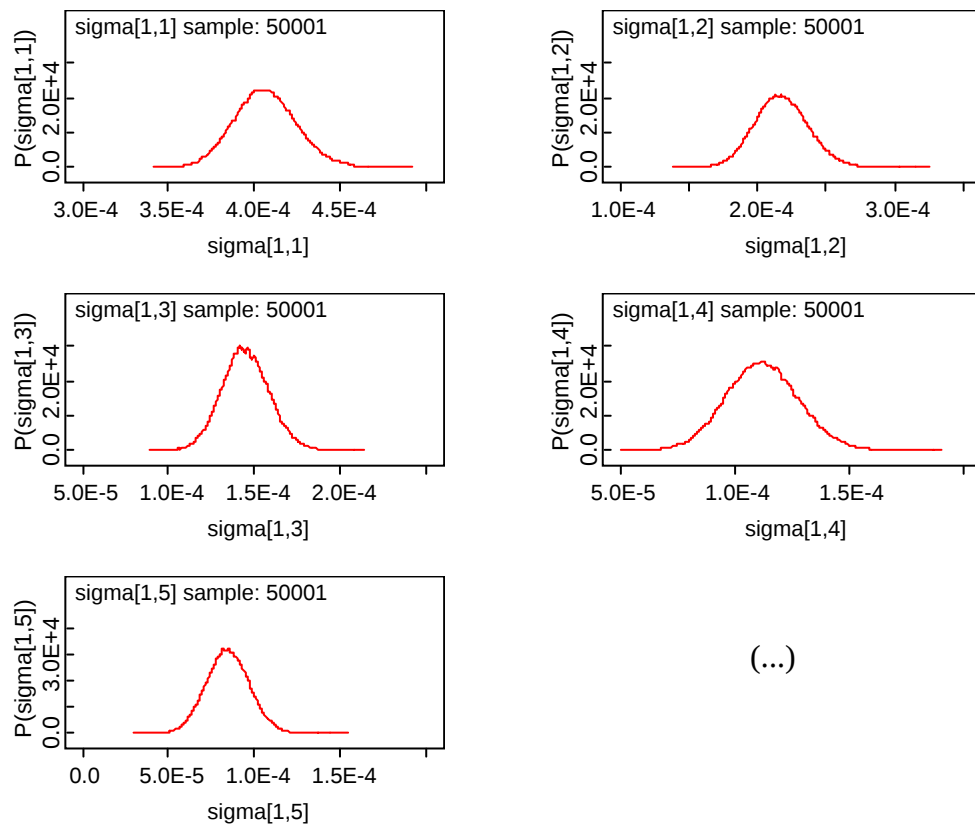




C.3.2 Matriz de covariância dos retornos

	mean	sd	MC_error	val2.5pc	val5.0pc	val10.0pc	val25.0pc
sigma[1,1]	4.066E-4	1.809E-5	8.142E-8	3.727E-4	3.778E-4	3.838E-4	3.942E-4
sigma[1,2]	2.177E-4	1.926E-5	8.743E-8	1.812E-4	1.868E-4	1.933E-4	2.045E-4
sigma[1,3]	1.449E-4	1.377E-5	6.489E-8	1.185E-4	1.228E-4	1.275E-4	1.356E-4
sigma[1,4]	1.123E-4	1.586E-5	6.473E-8	8.186E-5	8.655E-5	9.217E-5	1.014E-4
sigma[1,5]	8.467E-5	1.247E-5	5.72E-8	6.077E-5	6.444E-5	6.876E-5	7.622E-5
sigma[2,1]	2.177E-4	1.926E-5	8.743E-8	1.812E-4	1.868E-4	1.933E-4	2.045E-4
sigma[2,2]	7.943E-4	3.546E-5	1.562E-7	7.281E-4	7.379E-4	7.497E-4	7.699E-4
sigma[2,3]	2.442E-4	1.973E-5	8.482E-8	2.07E-4	2.128E-4	2.195E-4	2.306E-4
sigma[2,4]	1.602E-4	2.229E-5	1.007E-7	1.171E-4	1.241E-4	1.321E-4	1.45E-4
sigma[2,5]	1.636E-4	1.772E-5	8.248E-8	1.294E-4	1.349E-4	1.409E-4	1.516E-4
sigma[3,1]	1.449E-4	1.377E-5	6.489E-8	1.185E-4	1.228E-4	1.275E-4	1.356E-4
sigma[3,2]	2.442E-4	1.973E-5	8.482E-8	2.07E-4	2.128E-4	2.195E-4	2.306E-4
sigma[3,3]	4.16E-4	1.866E-5	8.566E-8	3.811E-4	3.864E-4	3.926E-4	4.031E-4
sigma[3,4]	1.248E-4	1.615E-5	7.643E-8	9.358E-5	9.861E-5	1.043E-4	1.138E-4
sigma[3,5]	1.371E-4	1.308E-5	5.899E-8	1.122E-4	1.16E-4	1.206E-4	1.282E-4
(...)							
	median	val75.0pc	val90.0pc	val95.0pc	val97.5pc	start	Sample
sigma[1,1]	4.061E-4	4.184E-4	4.3E-4	4.372E-4	4.44E-4	100000	50001
sigma[1,2]	2.172E-4	2.305E-4	2.427E-4	2.502E-4	2.565E-4	100000	50001
sigma[1,3]	1.446E-4	1.54E-4	1.626E-4	1.68E-4	1.727E-4	100000	50001
sigma[1,4]	1.12E-4	1.228E-4	1.327E-4	1.388E-4	1.441E-4	100000	50001
sigma[1,5]	8.455E-5	9.299E-5	1.007E-4	1.054E-4	1.096E-4	100000	50001
sigma[2,1]	2.172E-4	2.305E-4	2.427E-4	2.502E-4	2.565E-4	100000	50001
sigma[2,2]	7.931E-4	8.175E-4	8.407E-4	8.546E-4	8.665E-4	100000	50001
sigma[2,3]	2.435E-4	2.572E-4	2.698E-4	2.776E-4	2.844E-4	100000	50001

sigma[2,4]	1.598E-4	1.751E-4	1.89E-4	1.973E-4	2.046E-4	100000	50001
sigma[2,5]	1.633E-4	1.753E-4	1.863E-4	1.931E-4	1.993E-4	100000	50001
sigma[3,1]	1.446E-4	1.54E-4	1.626E-4	1.68E-4	1.727E-4	100000	50001
sigma[3,2]	2.435E-4	2.572E-4	2.698E-4	2.776E-4	2.844E-4	100000	50001
sigma[3,3]	4.153E-4	4.281E-4	4.403E-4	4.478E-4	4.542E-4	100000	50001
sigma[3,4]	1.246E-4	1.355E-4	1.455E-4	1.517E-4	1.57E-4	100000	50001
sigma[3,5]	1.368E-4	1.458E-4	1.541E-4	1.589E-4	1.635E-4	100000	50001
(...)							



APÊNDICE D

JANELAS DE TEMPO

Este trabalho aborda a análise de janelas de tempo, onde a partir de um histórico de retornos de comprimento fixo (uma janela), são realizados os cálculos. A primeira janela contempla 1.000 observações, no período de aproximadamente 4 anos (2 janeiro de 2002 até 3 de janeiro de 2006). A cada período de cálculo (janela de tempo), as cinco observações mais antigas são excluídas do histórico e as cinco observações posteriores à última data contemplada na janela anterior são acrescentadas. Foram analisadas 12 janelas de tempo, de histórico fixo de 1.000 observações, alterando-se o histórico em cinco dias (que houveram negociação), descritas a seguir:

- o Janela 1: 2 de janeiro de 2002 até 3 de janeiro de 2006;
- o Janela 2: 9 de janeiro de 2002 até 10 de janeiro de 2006;
- o Janela 3: 16 de janeiro de 2002 até 17 de janeiro de 2006;
- o Janela 4: 23 de janeiro de 2002 até 24 de janeiro de 2006;
- o Janela 5: 31 de janeiro de 2002 até 1 de fevereiro de 2006;
- o Janela 6: 7 de fevereiro de 2002 até 8 de fevereiro de 2006;
- o Janela 7: 18 de fevereiro de 2002 até 15 de fevereiro de 2006;
- o Janela 8: 25 de fevereiro de 2002 até 22 de fevereiro de 2006;
- o Janela 9: 4 de março de 2002 até 3 de março de 2006;
- o Janela 10: 11 de março de 2002 até 10 de março de 2006;
- o Janela 11: 18 de março de 2002 até 17 de março de 2006;
- o Janela 12: 25 de março de 2002 até 24 de março de 2006.

APÊNDICE E

ALGORITMOS DE CÁLCULO – APLICATIVO MATLAB

Este apêndice tem como objetivo apresentar as rotinas de cálculo utilizadas neste trabalho através do aplicativo MATLAB.

E.1 Cálculo da variância e do VaR clássico

```
%Cálculo da variância e do VaR Clássico

%Leitura dos dados
Dados=xlsread('C:\Cenario1','a1:ap1000')

%Cálculo da matriz de covariâncias, variância e desvio-padrão
matrizcov=cov(Dados)
variancia=diag(cov(Dados))
dsvpadrao=sqrt(diag(cov(Dados)))

%Cálculo do VaR com confiabilidade de 95% para cada ativo: z = -1,645
z=(-1.645)
valoremrisco=dsvpadrao*z

%Definição do portfólio
x=1/8
participacao=[x;x;x;x;x;x;x;x]

%Cálculo da variância para o portfólio
variancia_port=participacao'*matrizcov*participacao

%Cálculo do VaR com confiabilidade de 95% para o portfólio: z = -1,645
valoremrisco_port=(sqrt(participacao'*matrizcov*participacao))*(z)
```

E.2 Cálculo da variância e do VaR para o modelo de suavização exponencial

```
%Cálculo da variância e do VaR para o modelo de Suavização Exponencial

%Leitura da matriz de covariância
matrizcov=xlsread('C:\Cenario1','S38:Z45')
```

```

%Cálculo da matriz de variância e desvio-padrão
variancia=diag(matrizcov)
dsvpad=sqrt(variancia)

%Cálculo do VaR com confiabilidade de 95% para cada ativo: z = -1,645
z=(-1.645)
valoremrisco=dsvpadrao*z

%Definição do portfólio
x=1/8
participacao=[x;x;x;x;x;x;x;x]

%Cálculo da variância para o portfólio
variancia_port=participacao'*matrizcov*participacao

%Cálculo do VaR com confiabilidade de 95% para o portfólio: z = -1,645
valoremrisco_port=(sqrt(participacao'*matrizcov*participacao))*(z)

```

E.3 Cálculo da variância e do VaR Bayesiano

E.3.1 Cálculo da variância e do VaR (método paramétrico)

```

%Variância e VaR Bayesiano calculado através da média da distribuição
%fornecida pelos estimadores bayesianos

%Leitura da matriz de covariância estimada pelo método bayesiano
%(média da distribuição)
matrizcov=xlsread('C:\Cenario1','S16:Z23')

%Cálculo da matriz de variância e desvio-padrão
variancia=diag(matrizcov)
dsvpad=sqrt(variancia)

%Cálculo do VaR com confiabilidade de 95% para cada ativo: z = -1,645
z=(-1.645)
valoremrisco=dsvpadrao*z

%Definição do portfólio
x=1/8
participacao=[x;x;x;x;x;x;x;x]

%Cálculo da variância para o portfólio
variancia_port=participacao'*matrizcov*participacao

%Cálculo do VaR com confiabilidade de 95% para o portfólio: z = -1,645
valoremrisco_port=(sqrt(participacao'*matrizcov*participacao))*(z)

```

```

%Variância e VaR Bayesiano calculado através do intervalo de 95% da
distribuição fornecida pelos estimadores bayesianos

%Leitura da variância estimada pelo método bayesiano
%(quantio de 95% da distribuição)
variancia=xlsread('C:\Cenario1','AB16:AB23')

%Cálculo do desvio-padrão
dsvpad=sqrt(variancia)

%Cálculo do VaR com confiabilidade de 95% para cada ativo: z = -1,645
z=(-1.645)
valoremrisco=dsvpadrao*z

%Definição do portfólio
x=1/8
participacao=[x;x;x;x;x;x;x;x]

%Cálculo da variância para o portfólio
variancia_port=participacao'*matrizcov*participacao

%Cálculo do VaR com confiabilidade de 95% para o portfólio: z = -1,645
valoremrisco_port=(sqrt(participacao'*matrizcov*participacao))*(z)

```

E.3.2 Cálculo da variância e do VaR através de simulação

```

%Cálculo da variância e do VaR Bayesiano do portfólio

%Leitura da matriz de covariância estimada pelo método bayesiano
%(média da distribuição)
matrizcov=xlsread('C:\Cenario1','S16:Z23')

contador=1
%Geração de dez mil retornos aleatórios para o portfólio
while contador<=10000
    %Gera-se uma matriz de covariância aleatória de acordo com a
    %distribuição de Wishart com os parâmetros:
    %Matriz de covariâncias simulada pelo método Bayesiano, e
    %graus de liberdade = 8 ativos
    matrizgerada=wishrnd(matrizcov,8)
    %Gera-se um retorno aleatório de acordo com uma distribuição
    %normal multivariada com os parâmetros:
    %Média = 0 para todos os retornos, e
    %matriz de covariâncias gerada no passo anterior
    retorno(contador,:)=mvnrnd([0;0;0;0;0;0;0;0],x)
    contador=contador+1
end

%Definição do portfólio
x=1/8
participacao=[x;x;x;x;x;x;x;x]

```

```

%Cálculo do retorno do portfólio
retornoport=retorno*participacao

%Cálculo da variância para o portfólio
variancia_port=cov(retornoport)

%Cálculo do VaR com confiabilidade de 95% para o portfólio
%Ordena os 10.000 retornos
retornoport=sort(retornoport)
%O VaR é dado pelo 500º retorno em ordem crescente
valoremrisco_port=retornoport(500,:)

```

E.4 Modelo de Markowitz

E.4.1 Avaliação do impacto da incerteza na matriz de covariâncias

```

%MODELO MARKOWITZ: avaliação do impacto da incerteza na matriz de
%covariâncias

%Leitura de dados:
%Histórico dos retornos logarítmicos:
Dados=xlsread('C:\Cenario1','a1:ap1000')
%Matriz de covariâncias estimada pelo método bayesiano:
%1. média da distribuição
matrizcov=xlsread('C:\Cenario1','S16:Z23')
%2. intervalo de 5% de credibilidade
matrizcov=xlsread('C:\Cenario1','S49:Z56')
%3. intervalo de 95% de credibilidade
%matrizcov=xlsread('C:\Cenario1','S73:Z80')

%Cálculo do valor esperado dos retornos
retorno=mean(Dados)

%Preenchimento da matriz de covariâncias e do vetor dos retornos para
%inclusão do ativo livre de risco
matrizcov=[matrizcov,[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]]
retorno=[retorno';0.000613]

%Parâmetros do modelo de otimização quadrática do MATLAB:
%Limite inferior da participação de cada ativo
inf=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0]
%Restrições: Retorno esperado do portfólio = variável (ret_esperado)
%
% Soma das participações de cada ativo = 1
a=[1;1;1;1;1;1;1;1;1;1]
aeq=[retorno';a']
beq=[ret_esperado;1]
Vcalc=matrizcov/0.5

coluna=1

```

```

%Composição da fronteira eficiente (retorno mínimo 0,05% e máximo 0,2%)

ret_esperado=0.0005
%Minimização da variância através da composição do portfólio
[x,fval]=quadprog(Vcalc,[],[],[],[],aeq,beq,inf,[])

%Varia-se o retorno esperado de 0,01% em 0,01% e calcula o portfólio para
%cada caso
while ret_esperado <= 0.002
    beq=[ret_esperado;1]
    [x,fval]=quadprog(Vcalc,[],[],[],[],aeq,beq,inf,[])
    portfólio(:,coluna)=x
    retorno_port(:,coluna)=x'*retorno
    variancia(:,coluna)=x'*matrizcov*x
    ret_esperado=ret_esperado+0.0001
    coluna=coluna+1
end

%Resultado expresso através da composição do portfólio, de seu retorno
%e variância
resultado=[portfólio;retorno;variancia]

```

E.4.2 Com estimação clássica dos parâmetros

```

%MODELO MARKOWITZ com estimação clássica dos parâmetros

%Leitura de dados (retornos logarítmicos)
Dados=xlsread('C:\Cenario1','a1:ap1000')

%Cálculo da matriz de covariâncias, variância, desvio-padrão e valor
%esperado dos retornos
matrizcov=cov(Dados)
variancia=diag(cov(Dados))
dsvpadrao=sqrt(diag(cov(Dados)))
retorno=mean(Dados)

%Preenchimento da matriz de covariâncias e do vetor dos retornos para
%inclusão do ativo livre de risco
matrizcov=[matrizcov,[0;0;0;0;0;0;0;0;0];[0,0,0,0,0,0,0,0,0]]
retorno=[retorno';0.000613]

%Caso 1
%Cálculo do portfólio ótimo para o retorno fixo de 0.000943

%Parâmetros do modelo de otimização quadrática do MATLAB:
%Limite inferior da participação de cada ativo
inf=[0;0;0;0;0;0;0;0;0]
%Restrições: Retorno esperado do portfólio = 0.000941
%
%           Soma das participações de cada ativo = 1
a=[1;1;1;1;1;1;1;1;1]
aeq=[retorno';a']
beq=[0.000941;1]
Vcalc=matrizcov/0.5

```

```

%Minimização da variância através da composição do portfólio
[x, fval]=quadprog(Vcalc, [], [], [], aeq, beq, inf, [])

%Portfólio solução
portfólio=x

%Caso 2
%Cálculo do portfólio ótimo para a variância fixa de 0.0003

%Parâmetros do modelo de otimização quadrática do MATLAB:
%Limite inferior da participação de cada ativo
inf=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0]
%Restrições: Retorno esperado do portfólio variável
%           Soma das participações de cada ativo = 1
a=[1;1;1;1;1;1;1;1;1;1]
aeq=[retorno';a']
Vcalc=matrizcov/0.5

%Ponto inicial da otimização:
%Retorno esperado do portfólio
ret=0.003
beq=[ret;1]
%Minimização da variância através da composição do portfólio
[x, fval]=quadprog(Vcalc, [], [], [], aeq, beq, inf, [])

%Diminui-se o retorno do portfólio até que a variância mínima seja
%de 0.0003
while fval>0.0003
    ret=ret-0.00001
    beq=[ret;1]
    [x, fval]=quadprog(Vcalc, [], [], [], aeq, beq, inf, [])
end

%Portfólio solução
portfólio=x

```

E.4.3 Com estimação bayesiana dos parâmetros

```

%MODELO MARKOWITZ com estimação bayesiana dos parâmetros

%Leitura de dados:
%Leitura da matriz de covariância estimada pelo método bayesiano
%(média da distribuição)
matrizcov=xlsread('C:\Cenario1', 'S16:Z23')
%Leitura do valor esperado dos retornos
retorno=xlsread('C:\Cenario1', 'S3:s10')

%Preenchimento da matriz de covariâncias e do vetor dos retornos para
%inclusão do ativo livre de risco
matrizcov=[matrizcov, [0;0;0;0;0;0;0;0;0;0]; [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]]
retorno=[retorno';0.000613]

```

```

%Caso 1
%Cálculo do portfólio ótimo para o retorno fixo de 0.000943

%Parâmetros do modelo de otimização quadrática do MATLAB:
%Limite inferior da participação de cada ativo
inf=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0]
%Restrições: Retorno esperado do portfólio = 0.000941
%           Soma das participações de cada ativo = 1
a=[1;1;1;1;1;1;1;1;1;1]
aeq=[retorno';a']
beq=[0.000941;1]
Vcalc=matrizcov/0.5

%Minimização da variância através da composição do portfólio
[x,fval]=quadprog(Vcalc,[],[],[],aeq,beq,inf,[])

%Portfólio solução
portfólio=x

%Caso 2
%Cálculo do portfólio ótimo para a variância fixa de 0.0003

%Parâmetros do modelo de otimização quadrática do MATLAB:
%Limite inferior da participação de cada ativo
inf=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0]
%Restrições: Retorno esperado do portfólio variável
%           Soma das participações de cada ativo = 1
a=[1;1;1;1;1;1;1;1;1;1]
aeq=[retorno';a']
Vcalc=matrizcov/0.5

%Ponto inicial da otimização:
%Retorno esperado do portfólio
ret=0.003
beq=[ret;1]
%Minimização da variância através da composição do portfólio
[x,fval]=quadprog(Vcalc,[],[],[],aeq,beq,inf,[])

%Diminui-se o retorno do portfólio até que a variância mínima seja
%de 0.0003
while fval>0.0003
    ret=ret-0.00001
    beq=[ret;1]
    [x,fval]=quadprog(Vcalc,[],[],[],aeq,beq,inf,[])
end

%Portfólio solução
portfólio=x

```

E.5 Modelo Minimax

```
%MODELO MINIMAX

%Leitura dos dados:
%Leitura da matriz de covariância estimada pelo método bayesiano
%(média da distribuição)
matrizcov=xlsread('C:\Cenario1','S16:Z23')
%Limite inferior dos retornos dos ativos
inf=xlsread('C:\Cenario1','ae3:ae10')
%Limite superior dos retornos dos ativos
sup=xlsread('C:\Cenario1','y3:y10')

%Tratamento das informações:
%Cálculo da matriz inversa da matriz de covariâncias
invmatrizcov=inv(matrizcov)
%Vetor retorno do ativo livre de risco
x=0.000613
livrederisco=[x;x;x;x;x;x;x;x]
%Parâmetros do modelo de otimização quadrática do MATLAB
Vcalc=invmatrizcov/0.5
fcalc=(-2)*(livrederisco)*invmatrizcov

%Minimização da função objetivo através dos valores esperados dos retornos
[x,fval]=quadprog(Vcalc,fcalc,[],[],[],[],inf,sup)
retorno_otimo=x

%Cálculo do portfólio ótimo para cada valor do parâmetro w (que mede a
%aversão ao risco do tomador de decisão)
w=0.1
a=1
while w<=1
    %Parâmetros do modelo de otimização quadrática do MATLAB
    Vcalc=(w/0.5)*matrizcov
    fcalc=-(1-w)*(retorno_otimo-livrederisco)
    %Maximização da função objetivo através da composição do portfólio
    [x,fval]=quadprog(Vcalc,fcalc)
    participacao(:,a)=x
    w=w+0.1
    a=a+1
end

%Cálculo do retorno esperado e da variância para cada portfólio ótimo
w=0.1
a=1
while w<=1
    ret(:,a)=0.000613+(((1-w)/(2*w))*((retorno_otimo-livrederisco)'*
        invmatrizcov*(retorno_otimo-livrederisco)))
    var(:,a)=((((1-w)*(1-w))/(4*w*w))*((retorno_otimo-livrederisco)'*
        invmatrizcov*(retorno_otimo-livrederisco)))
    w=w+0.1
    a=a+1
end

%Caso 1
%Cálculo do portfólio ótimo para o retorno fixo de 0.000941
```

```

w=0
retfixo=0.000613+(((1-w)/(2*w))*((retorno_otimo-livrederisco)'+
    invmatrizcov*(retorno_otimo-livrederisco)))
while retfixo > 0.000941
    w=w+0.005
    retfixo=0.000613+(((1-w)/(2*w))*((retorno_otimo-livrederisco)'+
        invmatrizcov*(retorno_otimo-livrederisco)))
end
%Composição do portfólio solução
participacao_retfixo=((1-w)/(2*w))*invmatrizcov*(retorno_otimo-
livrederisco)

%Variância do portfólio solução
var_retfixo=(((1-w)*(1-w))/(4*w*w))*((retorno_otimo-livrederisco)'+
    invmatrizcov*(retorno_otimo-livrederisco)))

%Caso 2
%Cálculo do portfólio ótimo para a variância fixa de 0.0003
w=0
varfixo=(((1-w)*(1-w))/(4*w*w))*((retorno_otimo-livrederisco)'+
    invmatrizcov*(retorno_otimo-livrederisco)))
while varfixo > 0.0003
    w=w+0.001
    varfixo=(((1-w)*(1-w))/(4*w*w))*((retorno_otimo-livrederisco)'+
        invmatrizcov*(retorno_otimo-livrederisco)))
end
%Composição do portfólio solução
participacao_varfixo=((1-w)/(2*w))*invmatrizcov*(retorno_otimo-
livrederisco)

%Retorno do portfólio solução
ret_varfixo=0.000613+(((1-w)/(2*w))*((retorno_otimo-livrederisco)'+
    invmatrizcov*(retorno_otimo-livrederisco)))

```

APÊNDICE F

RESULTADOS DO MODELO MINIMAX

Os resultados obtidos para a composição do portfólio, através do modelo minimax, de acordo com o fator de aversão ao risco w , assim como, o valor esperado e a variância para o retorno do portfólio solução, em cada um dos períodos ou janelas de tempo são apresentados a seguir.

Janela 2 (10 de janeiro de 2006)

Tabela F.1 - Composição do portfólio pelo fator de aversão ao risco (w) – Janela 2

	Retorno	Participação pelo fator w									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
VALE5	0,0946%	289,9%	128,8%	75,2%	48,3%	32,2%	21,5%	13,8%	8,1%	3,6%	0,0%
CSNA3	0,1013%	147,2%	65,4%	38,2%	24,5%	16,4%	10,9%	7,0%	4,1%	1,8%	0,0%
PETR4	0,0786%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
EMBR4	0,0737%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
AMBV4	0,0721%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TNLP4	0,0790%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
CMIG4	0,0797%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
ITAU4	0,0755%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
CDI*	0,0613%	-337,1%	-94,3%	-13,3%	27,2%	51,4%	67,6%	79,2%	87,9%	94,6%	100,0%
TOTAL		100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
RETORNO		0,2167%	0,1304%	0,1016%	0,0872%	0,0786%	0,0728%	0,0687%	0,0656%	0,0632%	0,0613%
VARIÂNCIA		0,006993	0,001381	0,000470	0,000194	0,000086	0,000038	0,000016	0,000005	0,000001	0,000000

Janela 3 (17 de janeiro de 2006)

Tabela F.2 - Composição do portfólio pelo fator de aversão ao risco (w) – Janela 3

	Retorno	Participação pelo fator w									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
VALE5	0,105%	458,5%	203,8%	118,9%	76,4%	50,9%	34,0%	21,8%	12,7%	5,7%	0,0%
CSNA3	0,0936%	55,9%	24,9%	14,5%	9,3%	6,2%	4,1%	2,7%	1,6%	0,7%	0,0%
PETR4	0,0791%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
EMBR4	0,0744%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
AMBV4	0,0719%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TNLP4	0,0773%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
CMIG4	0,0781%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
ITAU4	0,0745%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
CDI*	0,0613%	-414,4%	-128,6%	-33,4%	14,3%	42,8%	61,9%	75,5%	85,7%	93,6%	100,0%
TOTAL		100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
RETORNO		0,2811%	0,1590%	0,1183%	0,0979%	0,0857%	0,0776%	0,0718%	0,0674%	0,0640%	0,0613%
VARIÂNCIA		0,009891	0,001954	0,000665	0,000275	0,000122	0,000054	0,000022	0,000008	0,000002	0,000000

Janela 4 (24 de janeiro de 2006)

Tabela F.3 - Composição do portfólio pelo fator de aversão ao risco (w) – Janela 4

	Retorno	Participação pelo fator w									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
VALE5	0,1041%	410,0%	182,2%	106,3%	68,3%	45,6%	30,4%	19,5%	11,4%	5,1%	0,0%
CSNA3	0,1026%	118,0%	52,4%	30,6%	19,7%	13,1%	8,7%	5,6%	3,3%	1,5%	0,0%
PETR4	0,0811%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
EMBR4	0,0756%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
AMBV4	0,0735%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TNLP4	0,0803%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
CMIG4	0,0815%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
ITAU4	0,0769%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
CDI *	0,0613%	-428,0%	-134,7%	-36,9%	12,0%	41,3%	60,9%	74,9%	85,3%	93,5%	100,0%
TOTAL		100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
RETORNO		0,2855%	0,1609%	0,1194%	0,0987%	0,0862%	0,0779%	0,0720%	0,0675%	0,0641%	0,0613%
VARIÂNCIA		0,010089	0,001993	0,000678	0,000280	0,000125	0,000055	0,000023	0,000008	0,000002	0,000000

Janela 5 (1 de fevereiro de 2006)

Tabela F.4 - Composição do portfólio pelo fator de aversão ao risco (w) – Janela 5

	Retorno	Participação pelo fator w									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
VALE5	0,1068%	361,0%	160,5%	93,6%	60,2%	40,1%	26,7%	17,2%	10,0%	4,5%	0,0%
CSNA3	0,1271%	269,2%	119,7%	69,8%	44,9%	29,9%	19,9%	12,8%	7,5%	3,3%	0,0%
PETR4	0,0879%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
EMBR4	0,0797%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
AMBV4	0,0780%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TNLP4	0,0890%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
CMIG4	0,0913%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
ITAU4	0,0838%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
CDI *	0,0613%	-530,3%	-180,1%	-63,4%	-5,0%	30,0%	53,3%	70,0%	82,5%	92,2%	100,0%
TOTAL		100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
RETORNO		0,4027%	0,2131%	0,1498%	0,1182%	0,0992%	0,0866%	0,0776%	0,0708%	0,0655%	0,0613%
VARIÂNCIA		0,015365	0,003035	0,001033	0,000427	0,000190	0,000084	0,000035	0,000012	0,000002	0,000000

Janela 6 (8 de fevereiro de 2006)

Tabela F.5 - Composição do portfólio pelo fator de aversão ao risco (w) – Janela 6

	Retorno	Participação pelo fator w									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
VALE5	0,0937%	234,2%	104,1%	60,7%	39,0%	26,0%	17,3%	11,2%	6,5%	2,9%	0,0%
CSNA3	0,1140%	228,4%	101,5%	59,2%	38,1%	25,4%	16,9%	10,9%	6,3%	2,8%	0,0%
PETR4	0,0819%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
EMBR4	0,0753%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
AMBV4	0,0743%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TNLP4	0,0830%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
CMIG4	0,0848%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
ITAU4	0,0790%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
CDI *	0,0613%	-362,6%	-105,6%	-19,9%	22,9%	48,6%	65,7%	78,0%	87,2%	94,3%	100,0%
TOTAL		100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
RETORNO		0,2575%	0,1485%	0,1122%	0,0940%	0,0831%	0,0758%	0,0706%	0,0668%	0,0637%	0,0613%
VARIÂNCIA		0,008829	0,001744	0,000593	0,000245	0,000109	0,000048	0,000020	0,000007	0,000001	0,000000

Janela 7 (15 de fevereiro de 2006)

Tabela F.6 - Composição do portfólio pelo fator de aversão ao risco (w) – Janela 7

	Retorno	Participação pelo fator w									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
VALE5	0,0867%	141,6%	62,9%	36,7%	23,6%	15,7%	10,5%	6,7%	3,9%	1,7%	0,0%
CSNA3	0,1136%	252,2%	112,1%	65,4%	42,0%	28,0%	18,7%	12,0%	7,0%	3,1%	0,0%
PETR4	0,0801%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
EMBR4	0,0738%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
AMBV4	0,0735%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TNLP4	0,0820%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
CMIG4	0,0838%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
ITAU4	0,0781%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
CDI *	0,0613%	-293,8%	-75,0%	-2,1%	34,4%	56,2%	70,8%	81,2%	89,1%	95,1%	100,0%
TOTAL		100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
RETORNO		0,2291%	0,1359%	0,1048%	0,0893%	0,0799%	0,0737%	0,0693%	0,0660%	0,0634%	0,0613%
VARIÂNCIA		0,007552	0,001492	0,000508	0,000210	0,000093	0,000041	0,000017	0,000006	0,000001	0,000000

Janela 8 (22 de fevereiro de 2006)

Tabela F.7 - Composição do portfólio pelo fator de aversão ao risco (w) – Janela 8

	Retorno	Participação pelo fator w									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
VALE5	0,0826%	47,4%	21,1%	12,3%	7,9%	5,3%	3,5%	2,3%	1,3%	0,6%	0,0%
CSNA3	0,1246%	339,6%	150,9%	88,0%	56,6%	37,7%	25,2%	16,2%	9,4%	4,2%	0,0%
PETR4	0,0822%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
EMBR4	0,0746%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
AMBV4	0,0749%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TNLP4	0,0856%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
CMIG4	0,0875%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
ITAU4	0,0899%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
CDI *	0,0613%	-287,0%	-72,0%	-0,3%	35,5%	57,0%	71,3%	81,6%	89,3%	95,2%	100,0%
TOTAL		100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
RETORNO		0,2863%	0,1613%	0,1196%	0,0988%	0,0863%	0,0780%	0,0720%	0,0676%	0,0641%	0,0613%
VARIÂNCIA		0,010127	0,002000	0,000681	0,000281	0,000125	0,000056	0,000023	0,000008	0,000002	0,000000

Janela 9 (3 de março de 2006)

Tabela F.8 - Composição do portfólio pelo fator de aversão ao risco (w) – Janela 9

	Retorno	Participação pelo fator w									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
VALE5	0,0814%	53,7%	23,9%	13,9%	9,0%	6,0%	4,0%	2,6%	1,5%	0,7%	0,0%
CSNA3	0,1183%	303,5%	134,9%	78,7%	50,6%	33,7%	22,5%	14,5%	8,4%	3,7%	0,0%
PETR4	0,0802%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
EMBR4	0,0737%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
AMBV4	0,0736%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TNLP4	0,0834%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
CMIG4	0,0851%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
ITAU4	0,0790%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
CDI *	0,0613%	-257,3%	-58,8%	7,4%	40,5%	60,3%	73,5%	83,0%	90,1%	95,6%	100,0%
TOTAL		100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
RETORNO		0,2451%	0,1430%	0,1090%	0,0919%	0,0817%	0,0749%	0,0701%	0,0664%	0,0636%	0,0613%
VARIÂNCIA		0,008272	0,001634	0,000556	0,000230	0,000102	0,000045	0,000019	0,000006	0,000001	0,000000

Janela 10 (10 de março de 2006)

Tabela F.9 - Composição do portfólio pelo fator de aversão ao risco (w) – Janela 10

	Retorno	Participação pelo fator w									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
VALE5	0,0773%	16,6%	7,4%	4,3%	2,8%	1,8%	1,2%	0,8%	0,5%	0,2%	0,0%
CSNA3	0,1120%	278,6%	123,8%	72,2%	46,4%	31,0%	20,6%	13,3%	7,7%	3,4%	0,0%
PETR4	0,0778%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
EMBR4	0,0720%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
AMBV4	0,0718%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TNLP4	0,0805%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
CMIG4	0,0824%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
ITAU4	0,0769%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
CDI *	0,0613%	-195,2%	-31,2%	23,5%	50,8%	67,2%	78,1%	85,9%	91,8%	96,4%	100,0%
TOTAL		100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
RETORNO		0,2052%	0,1253%	0,0986%	0,0853%	0,0773%	0,0720%	0,0682%	0,0653%	0,0631%	0,0613%
VARIÂNCIA		0,006476	0,001279	0,000435	0,000180	0,000080	0,000036	0,000015	0,000005	0,000001	0,000000

Janela 11 (17 de março de 2006)

Tabela F.10 - Composição do portfólio pelo fator de aversão ao risco (w) – Janela 11

	Retorno	Participação pelo fator w									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
VALE5	0,0793%	75,9%	33,8%	19,7%	12,7%	8,4%	5,6%	3,6%	2,1%	0,9%	0,0%
CSNA3	0,1041%	217,4%	96,6%	56,4%	36,2%	24,2%	16,1%	10,4%	6,0%	2,7%	0,0%
PETR4	0,0763%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
EMBR4	0,0711%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
AMBV4	0,0708%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TNLP4	0,0778%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
CMIG4	0,0796%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
ITAU4	0,0749%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
CDI *	0,0613%	-193,4%	-30,4%	23,9%	51,1%	67,4%	78,3%	86,0%	91,9%	96,4%	100,0%
TOTAL		100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
RETORNO		0,1680%	0,1087%	0,0890%	0,0791%	0,0732%	0,0692%	0,0664%	0,0643%	0,0626%	0,0613%
VARIÂNCIA		0,004802	0,000949	0,000323	0,000133	0,000059	0,000026	0,000011	0,000004	0,000001	0,000000

Janela 12 (24 de março de 2006)

Tabela F.11 - Composição do portfólio pelo fator de aversão ao risco (w) – Janela 12

	Retorno	Participação pelo fator w									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
VALE5	0,0838%	118,6%	52,7%	30,7%	19,8%	13,2%	8,8%	5,6%	3,3%	1,5%	0,0%
CSNA3	0,1087%	230,4%	102,4%	59,7%	38,4%	25,6%	17,1%	11,0%	6,4%	2,8%	0,0%
PETR4	0,0785%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
EMBR4	0,0726%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
AMBV4	0,0721%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TNLP4	0,0797%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
CMIG4	0,0816%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
ITAU4	0,0767%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
CDI *	0,0613%	-249,0%	-55,1%	9,5%	41,8%	61,2%	74,1%	83,4%	90,3%	95,7%	100,0%
TOTAL		100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
RETORNO		0,1972%	0,1217%	0,0965%	0,0839%	0,0764%	0,0714%	0,0678%	0,0651%	0,0630%	0,0613%
VARIÂNCIA		0,006115	0,001208	0,000411	0,000170	0,000075	0,000034	0,000014	0,000005	0,000001	0,000000